Geometria (9 crediti) – recupero II appello – A.A. 2011/12 – 21/02/2012

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Deve essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No".*

Poni a uguale alla penultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$_____

1. Esiste una forma bilineare simmetrica degenere su $\mathbb{R}_2[t]$ tale che $\langle 1,1\rangle = 10-a$, $\langle t,t\rangle = 1$, $\langle t^2,t^2\rangle = 1$?

2. Esistono $h,k \in \mathbb{R}$ tali che il sistema $\begin{cases} hx+2y+3z = |5-a| \\ x+2hy+3hz = k \end{cases}$ ammette un piano di soluzioni?

3. È vero che la matrice associata a un'applicazione lineare $T : M_{2,3}(\mathbb{R}) \to M_{3,2}(\mathbb{R})$ è quadrata?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 4 & -k \\ -k & -k & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(i) Trova gli autovalori di A_k;

(ii) stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;

(iii) per i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile scrivi una base di autovettori e la matrice diagonale a cui A_k è simile.

(iv) Trova tutti i valori di k per cui il vettore $(10-a)e_1 - (10-a)e_3$ è autovettore di A_k.

B. Dati i punti $A = (1,-1,0)$, $B = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $C = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $D = (a,-2,-\frac{1}{2})$ nello spazio euclideo:

(i) Verifica che i quattro punti sono complanari e trova l'equazione del piano π che li contiene.

(ii) Trova l'equazione della retta r perpendicolare a π e passante per D.

(iii) Data la retta s di equazioni parametriche $x = \sqrt{2}$, $y = t$, $z = -2t - \frac{9}{2}$, trova il punto E di intersezione tra s e π.

(iv) Determina posizione reciproca e distanza tra r e s e verifica che la distanza tra r e s è uguale alla distanza tra D e E.

C. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}^2$ definita da $T(p(t)) = \begin{pmatrix} p'(1) \\ p''(-1) \end{pmatrix}$

(i) Scrivi la matrice associata a T rispetto a basi a tua scelta.

(ii) Verifica che T è suriettiva e trova dimensione e base di $U = \ker T$.

(iii) Dato il sottospazio $W = \mathrm{Span}\left(1+(a+1)t, 1+(a+1)t+t^2, t^2+t^3\right)$ di $\mathbb{R}_3[t]$, calcola la dimensione e trova una base di W. Completa poi la base di W a una base di $\mathbb{R}_3[t]$.

(iv) Calcola la dimensione e trova una base di $U+W$ e di $U \cap W$.

Corso di laurea Ingegneria: __________________ **Scelta turno orale:**__________________