Scritto di Geometria – Ing. Civile e Ambientale – A.A. 2011/12 – 14/02/2012

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Deve essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No".*

Poni a uguale alla penultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$____

1. Esiste una matrice $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ di rango 2 con $\operatorname{tr} A = 0$?

2. Determina la posizione reciproca delle rette r di equazioni cartesiane $2x + y - z = 0$, $x + 2z = 0$ ed s di equazioni parametriche $x = -2t + a - 7$, $y = t + 2$, $z = 3(a - 4)t + 5$.

3. Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base dello spazio vettoriale V, è vero che $v_1-v_2, v_1+v_3+v_4, 2v_1+2v_2+2v_3$ sono vettori linearmente indipendenti?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice $A_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 3k & 2k & 1 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

(i) Scrivi il polinomio caratteristico di A_k. (Suggerimento: per semplificare i calcoli, sostituisci al posto della seconda colonna di $A_k - \lambda I_3$ un'opportuna combinazione lineare delle colonne.)

(ii) Trova gli autovalori di A_k.

(iii) Determina per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

(iv) Nei casi $k = 0$ e $k = -2$ trova gli autovettori di A_k e discuti l'esistenza di una base di autovettori.

(v) Determina per quali $k \in \mathbb{R}$ il determinante di A_k vale -1.

B. Al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ studia il seguente sistema lineare e, quando possibile, determinane le soluzioni:

$$\begin{cases} kx_1 + (a-4)kx_2 + (3-k)x_3 = 1, \\ (k^2 - 8k)x_3 + (8 - |k|)x_4 = -3, \\ x_1 + kx_2 + x_4 = h. \end{cases}$$

C. Considera il polinomio $P(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + (7-a)x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_3^2 + 8x_2 - 2x_3 + a - 6$.

(i) Trova la forma canonica affine della conica $\mathcal{C}$ ottenuta intersecando la quadrica associata a $P(x)$ con il piano di equazione cartesiana $x_1 - x_2 = a - 4$;

(ii) trova la forma canonica affine della quadrica associata a $P(x)$.

Scelta turno orale:________________________________