Scritto di Geometria – Ing. Civile e Ambientale – A.A. 2011/12 – 19/01/2012

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Deve essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No".*

Poni a uguale all'ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$_____

1. È vero che tutte le applicazioni lineari non nulle da $\mathbb{R}_2[t]$ a $\mathbb{R}^4$ sono iniettive?
2. Esiste una forma bilineare simmetrica indefinita $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su $\mathbb{R}^3$ tale che $\langle e_3, v \rangle = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$?
3. Se A è una matrice non nulla tale che $A^2 = 0$, allora è vero che A ha almeno un autovalore nullo?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Considera la matrice $M = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 0 & 10-a \end{pmatrix}$ e l'applicazione $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ definita da $T(X) = MX + X^T M^T$.

(i) Verifica che T è lineare e scrivi la matrice A associata a T rispetto a una base a tua scelta.

(ii) Calcola dimensione di $\operatorname{Ker} T$ e di $\operatorname{Im} T$ e stabilisci se T è iniettiva, suriettiva, invertibile.

(iii) Scrivi una base di $\operatorname{Ker} T$ e una base di $\operatorname{Im} T$.

(iv) Trova gli autovalori di T e stabilisci se T è diagonalizzabile.

(v) È vero che se $B \in \operatorname{Im} T$ allora B è simmetrica?

B. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la quadrica Q_k di equazione $x^2 + 4xy - 2yz + kz^2 + 4x + 1 = 0$.

(i) Poni $k = a$ e trova la forma canonica affine di Q_a.

(ii) Trova i valori di k per cui la quadrica Q_k è degenere e per tali valori stabilisci se è un cilindro, un cono o una coppia di piani.

(iii) Verifica che il punto $P = (-1, -\frac{1}{2}, 0)$ appartiene alla quadrica Q_k per ogni k;

(iv) per tutti i valori di k per cui la quadrica è non degenere, scrivi l'equazione del piano Π tangente a Q_k in P;

(v) scrivi l'equazione della retta r perpendicolare a Π e passante per $R = (1, 1, 1)$.

C. Al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ discuti la compatibilità del sistema e trovane quando possibile le soluzioni:

$$\begin{cases} x + hy + h^2 z = h + 2 \\ x + y + z = a \\ x + y + h^2 z = h + 2 \end{cases}$$

Scelta turno orale:______________________________