

## 1 Limiti di funzioni

### 1.1 Limiti notevoli

Ricordiamo i seguenti limiti notevoli:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{2}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} &= 1; & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}); \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^b \log x &= 0 \ (b > 0); & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^b} &= 0 \ (b > 0); & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{a^x} &= 0 \ (b > 0, a > 1); \end{aligned}$$

### 1.2 Esercizio

Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}; & \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}; & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x}; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 5}{x^2 - \sqrt{x} + 3}; & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x^2 - 4\sqrt{x}}; & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x}{5x^2 - 3x}; \\ \lim_{x \rightarrow 0} x e^{-\frac{1}{|x|}}; & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}; & \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{x - \sin x}; & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \sin x); & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin x; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{2x - e^{-x}}; & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}; & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x - x^3}{x + \sin x}; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3} + (\log x)^2}{x^2 + x}; & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + e^x}{\log x + 3x^2}; & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}}; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(1 + 2^x)}{x^2}; & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) \log(1 + \frac{1}{x})}{x}; & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x + \log x)}{\log x}; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2} \right); & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2} \right); & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{|x| + 1} + x; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + 2} - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} \right); & \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x + 2|}{x^2 - 4}; & \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)^2}{|x^2 - 4|}; \end{aligned}$$

### 1.3 Esercizio

Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{lll}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x \operatorname{sen} 2x}; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 3x)}{\operatorname{sen} 4x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{e^{x^2} - 1}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^3)^2 - 1}{x^2}; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^3)^2 - 1}{x^3}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\operatorname{sen} x) - 1}{x^2}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{1 - e^{2x}}; \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x; & \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^x; & \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}; \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3} \right)^x; & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x^2 - 1} \right)^{x^2}; & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x - 1}{x^2} \right)^x; \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{|x|} \right)^x; & \lim_{x \rightarrow \infty} |x|^{\frac{1}{x}}; & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\log x};
 \end{array}$$

### 1.4 Esercizio

Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{\operatorname{sen}(4x^2)}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2(3x)}{1 - \cos(4x^2)}; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\log(1 + 3x^3)}; & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(x + 1)}{x(2 + \operatorname{sen} x)}; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}; & \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\log(x + 1) - \log x);
 \end{array}$$

## 2 Funzioni continue

### 2.1 Esercizio

Stabilire se le seguenti funzioni sono continue.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x - 1} & \text{se } x < 0, \\ \log(1+x) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{(1 - \cos x) \cos\left(\frac{2}{x}\right)}{\log(1+x)} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -1 < x < 1, \\ x^2 & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x - \log(1 - e^x) & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{1+x - \cos x}{x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + e^x}{2x^3 + \log(x^2)} & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{e^{\operatorname{sen}^3 x} - 1}{\cos x - e^{x^2}} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

### 2.2 Esercizio

Verificare che le seguenti funzioni hanno tutte come insieme di definizione  $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ .

Dire se è possibile prolungarle per continuità nel punto  $x = 0$ , in cui esse non sono definite.

$$f(x) = \frac{|x|}{x}; \quad f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}; \quad f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right); \quad f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right); \quad f(x) = \frac{1}{\log|x|}; \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}}; \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}};$$