1 Derivate

1.1 Esercizio

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni specificando, quando è possibile, sia il dominio di f che di Df.

$\dfrac{x}{x^2+1}$;	$x^2(x-1)^3$;	$\dfrac{1+x}{1-x}$;
$\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;	$\dfrac{\sqrt{x}-x}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}$;	$\dfrac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+1}$;
$\operatorname{sen}^3 x \cos x$;	$\operatorname{arcsen}(\sqrt{1-\cos^2 x})$;	$\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$;
$\log x^5$;	$\log\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$;	$e^{\frac{x+2}{x-1}}$;
$\log(\log x)$;	$e^{\operatorname{sen} x}$;	x^x;
$x^3 \operatorname{arcsen} x + \cos x \log_3 x$;	$x \cos x \log x$;	$\dfrac{1+\cos x}{\cos x}$;
$\dfrac{x+\log x}{\operatorname{arcsen} x}$;	$\sqrt{\operatorname{sen} x}$;	$\sqrt[3]{x^2-1}$;
$(1-\operatorname{sen} x)^x$;	$\arccos(\log x)$;	$\sqrt{\log(\operatorname{sen} x)}$;
$\operatorname{tg} x + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$;	$x \arccos x$;	$x^{(x^x)}$;
$\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x-1}$;	$\dfrac{x^5-3x}{2x+1}$;	$\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}}$;
$\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$;	$\log^2 x + \operatorname{arcsen} x$;	$\dfrac{2\cos x - \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}$;
$\dfrac{1}{\cos x}$;	$2^{\operatorname{arctg} x}$;	$\log(\sqrt{x^2-1})$;

1.2 Esercizio

Studiare continuità e derivabilità delle seguenti funzioni.

$$f(x) = \operatorname{sen}(|x|).$$

$$f(x) = x\sqrt{|x|}.$$

$$f(x) = x + |x|.$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 1, \\ x^2 - x & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+2x)}{x} & \text{se } x > 0, \\ 2(1-x) & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2} & \text{se } x \neq 0, \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{x^2} & \text{se } x \neq 0, \\ \dfrac{1}{3} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0, \\ 2 - 2\cos x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0, \\ \operatorname{sen}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}\left(\dfrac{1}{1+e^{\frac{3}{x}}}\right) & \text{se } x > 0, \\ 1 + x - e^x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

1.3 Esercizio

Calcolare i seguenti limiti utilizzando, se necessario, il Teorema di L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3};$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-x} - 1}{x};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2 \operatorname{sen} x};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x) - 2x + x^2}{x^2 \log(1+x)};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(\log(1+x))}{(1+x^2)^5 - 1};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} - \cos x};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(1-\cos x)}{2 - e^x - e^{-x}};$$

2 Studio di funzioni

2.1 Esercizio

Studiare le seguenti funzioni: determinare dominio, eventuali simmetrie, segno e intersezioni con gli assi, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo e minimo relativo; tracciare poi l'andamento qualitativo del grafico.

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right). \qquad f(x) = \sqrt{x|x-3|}.$$

$$f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x}. \qquad f(x) = e^{\frac{x}{\log x}}.$$

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-1}\, e^x. \qquad f(x) = \frac{|x-1|}{x^3-1}.$$

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{4} - 9\right) e^{\frac{2}{x-6}}. \qquad f(x) = |x-1|\,|x-2|\, e^{-|x|}.$$

$$f(x) = -\frac{|x^2-4|}{x-2} \log(|x-2|). \qquad f(x) = \frac{x^2-9}{|x+3|}.$$

2.2 Esercizio

Determinare il numero di soluzioni delle seguenti equazioni, tramite un opportuno studio di funzione.

$a)$ $\log x = x - 2.$

$b)$ $(1-x)e^{\frac{x}{2}} = 1.$

$c)$ $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2x}\right) - \frac{2x}{1+4x^2} = 1.$

2.3 Esercizio

Determinare il numero di soluzioni delle seguenti equazioni al variare del parametro reale α.

$a)$ $xe^{\frac{1}{x}} = \alpha.$

$b)$ $\frac{(1+2x)e^x}{x} = \alpha.$

$c)$ $\frac{5}{5+x^2}\, e^{\frac{x}{3}} = \alpha.$

$d)$ $(9+x^2)\, e^{-\frac{x}{5}} = \alpha.$