

Corso di Laurea in Scienze Biologiche
Prova scritta di Matematica del 26/01/2007

COGNOME _____ NOME _____

MATRICOLA _____

1.1) Determinare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(2x^2) - 2e^{3x^2} + 2}{x^2(1 - \cos(x))}$.

Possibile svolgimento. Il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Calcoliamolo utilizzando ripetutamente il Teorema di de l'Hopital. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(2x^2) - 2e^{3x^2} + 2}{x^2(1 - \cos(x))} & \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x \cos(2x^2) - 12xe^{3x^2}}{2x(1 - \cos(x)) + x^2 \sin(x)} = \frac{12(\cos(2x^2) - e^{3x^2})}{2(1 - \cos(x)) + x \sin(x)} \left(= \left[\frac{0}{0}\right] \right) \\ & \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12(-4x \sin(2x^2) - 6xe^{3x^2})}{3 \sin(x) + x \cos(x)} \left(= \left[\frac{0}{0}\right] \right) \\ & \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12(-4 \sin(2x^2) - 16x^2 \cos(2x^2) - 6e^{3x^2} - 36x^2 e^{3x^2})}{4 \cos(x) + x \sin(x)} = -\frac{12 \cdot 6}{4} = -18. \end{aligned}$$

1.2) **Per esercizio:** verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(3x^2) + 3e^{2x^2} - 6x^2 - 5}{x^3 \sin(x)} = -3.$$

1.3) Determinare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log(1 + 3x) - 3 \arctan(2x)}{x(e^x - 1)}$.

Possibile svolgimento. Il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Calcoliamolo utilizzando ripetutamente il Teorema di de l'Hopital. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log(1 + 3x) - 3 \arctan(2x)}{x(e^x - 1)} & \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{3}{1+3x} - 3 \frac{2}{1+4x^2}}{e^x - 1 + xe^x} = \frac{6(1 + 3x)^{-1} - 6(1 + 4x^2)^{-1}}{e^x - 1 + xe^x} \left(= \left[\frac{0}{0}\right] \right) \\ & \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-18(1 + 3x)^{-2} - 48x(1 + 4x^2)^{-2}}{2e^x + xe^x} = -\frac{18}{2} = -9. \end{aligned}$$

1.4) **Per esercizio:** verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \log(1 + 2x) - 2 \arctan(3x)}{x \sin(x)} = -6.$$

2.1) Determinare se in $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 \left(\frac{e^x - 1}{2x + x^2} \right) & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

risulta continua e se risulta derivabile.

Possibile svolgimento. Osserviamo che $f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Per calcolare il limite destro $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ sfruttiamo il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

insieme alle proprietà dei limiti. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{e^x - 1}{2x + x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x + x^2} = 1.$$

ne segue $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ e perciò la funzione data è continua in $x_0 = 0$.

Calcoliamone la derivata in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per $x < 0$ si ha

$$f'(x) = D \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

mentre per $x > 0$ si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= D \left(2 \left(\frac{e^x - 1}{2x + x^2} \right) \right) = \frac{2e^x(2x + x^2) - 2(e^x - 1)(2 + 2x)}{(2x + x^2)^2} \\ &= \frac{e^x(2x^2 - 4) + 4x + 4}{x^2(2 + x)^2}. \end{aligned}$$

Ne deduciamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(2x^2 - 4) + 4x + 4}{x^2(2 + x)^2} & x > 0, \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} & x < 0. \end{cases}$$

Calcoliamo ora il limite destro e sinistro di $f'(x)$ per $x \rightarrow 0$. Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(2x^2 - 4) + 4x + 4}{x^2(2 + x)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(2x^2 - 4) + 4x + 4}{x^4 + 4x^3 + 4x^2} \left(= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &=^{(H)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(2x^2 + 4x - 4) + 4}{4x^3 + 12x^2 + 8x} \left(= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &=^{(H)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(2x^2 + 8x)}{12x^2 + 24x + 8} = 0. \end{aligned}$$

Si ha dunque $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$. Ne segue che la funzione f è continua e derivabile in $x_0 = 0$ e risulta $f'(0) = 0$.

Per esercizio: giungere alla stessa conclusione applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale.

2.2) Per esercizio: verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{\log(1-x)} & \text{se } x > 0 \\ -\cos(x) & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

è continua e derivabile in $x_0 = 0$ con $f'(0) = 0$.

2.3) Determinare se in $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+2x}-1} & \text{se } x > 0 \\ 1+3x^2 & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

risulta continua e se risulta derivabile.

Possibile svolgimento. Osserviamo che $f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Per calcolare il limite destro $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ sfruttiamo i due limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} = 1$$

insieme alle proprietà dei limiti. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+2x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+2x}-1} = 1.$$

ne segue $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ e perciò la funzione data è continua in $x_0 = 0$.

Calcoliamone la derivata in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per $x < 0$ si ha

$$f'(x) = D(1+3x^2) = 6x,$$

mentre per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = D\left(\frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+2x}-1}\right) = \frac{\frac{\sqrt{1+2x}-1}{1+x} - \frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+2x}}}{(\sqrt{1+2x}-1)^2}.$$

Ne deduciamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\frac{\sqrt{1+2x}-1}{1+x} - \frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+2x}}}{(\sqrt{1+2x}-1)^2} & x > 0, \\ 6x & x < 0. \end{cases}$$

Osserviamo ora che, mentre si ha $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 6x = 0$, il calcolo del limite destro di $f'(x)$ per $x \rightarrow 0$ richiede un po' di calcoli algebrici ed è lasciato per esercizio.

Conviene quindi svolgere l'esercizio applicando la definizione di derivata (destra, in questo caso) come limite del rapporto incrementale. Calcoliamoci quindi il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+2x}-1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x) - \sqrt{1+2x} + 1}{x(\sqrt{1+2x}-1)}.$$

Lo calcoliamo (per $x \rightarrow 0$) con il Teorema di de l'Hopital:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x) - \sqrt{1+2x} + 1}{x(\sqrt{1+2x} - 1)} \quad \left(= \left[\frac{0}{0} \right] \right) \\ & \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+2x}}}{\sqrt{1+2x} - 1 + \frac{x}{\sqrt{1+2x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{(1+x)(1+3x - \sqrt{1+2x})} \quad \left(= \left[\frac{0}{0} \right] \right) \\ & \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+2x}} - 1}{1 + 3x - \sqrt{1+2x} + (1+x) \left(3 - \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \right)} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Concludiamo che $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$. Infine la funzione f è continua e derivabile in $x_0 = 0$ e risulta $f'(0) = 0$.

2.4) Per esercizio: verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+2x)}{\sqrt{1+4x}-1} & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

è continua e derivabile in $x_0 = 0$ con $f'(0) = 0$.

3.1) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$2 \arctan(|1-x|) + x = \frac{\pi}{2}.$$

Possibile svolgimento. Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 2 \arctan(|1-x|) + x.$$

Abbiamo allora che x è una soluzione dell'equazione data se e solo se

$$f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi il problema proposto si riconduce alla determinazione delle intersezioni del grafico della funzione $y = f(x)$ con la retta orizzontale $y = \frac{\pi}{2}$.

La funzione f è continua su \mathbb{R} (giustificare questa affermazione); per studiarla riscriviamola nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \arctan(x-1) + x & \text{se } x \geq 1 \\ 2 \arctan(1-x) + x & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Tralasciamo lo studio del segno; osserviamo solo che si ha $f(1) = 1$ e $f(x) > 0$ per ogni $x \geq 1$ (giustificare questa affermazione). Inoltre, essendo l'arcotangente una funzione limitata, abbiamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Per studiare la monotonia di f calcoliamone la derivata prima (lo studio della derivabilità in $x_0 = 1$ è lasciato per esercizio). Per $x < 1$ si ha

$$f'(x) = D(2 \arctan(1-x) + x) = \frac{-2}{1+(1-x)^2} + 1 = \frac{(1-x)^2 - 1}{1+(1-x)^2}$$

e analogamente per $x > 1$ si ha

$$f'(x) = D(2 \arctan(x-1) + x) = \frac{2}{1+(x-1)^2} + 1 = \frac{(x-1)^2 + 3}{1+(x-1)^2}.$$

Ne deduciamo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2 + 3}{1+(x-1)^2} & \text{se } x > 1 \\ \frac{(1-x)^2 - 1}{1+(1-x)^2} & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Studiamo il segno di $f'(x)$. Osserviamo subito che $f'(x) > 0$ per $x > 1$; mentre, per $x < 1$, $f'(x)$ ha lo stesso segno di $(1-x)^2 - 1 = x^2 - 2x = x(x-2)$. Abbiamo così $f'(x) > 0$ per $x < 0$ (oltre che per $x > 1$), e $f'(x) < 0$ per $0 < x < 1$; $f'(x) = 0$ per $x = 0$. Perciò la funzione f è crescente nei due intervalli illimitati $(-\infty, 0)$ e $(1, +\infty)$, ed è decrescente in $(0, 1)$. Ne segue che per $x = 0$ la funzione data ammette un valore massimo relativo dato da $f(0) = \frac{\pi}{2}$, mentre per $x = 1$ la funzione data ammette un valore minimo relativo dato da $f(1) = 1$.

Un semplice studio del grafico permette di determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$2 \arctan(|1-x|) + x = \alpha.$$

Si ha infatti:

- $\alpha < 1 \Rightarrow$ c'è una sola soluzione (negativa);
- $\alpha = 1 \Rightarrow$ ci sono 2 soluzioni;
- $1 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ ci sono 3 soluzioni;
- $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ ci sono 2 soluzioni;
- $\alpha > \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ c'è una sola soluzione (positiva).

In particolare ne deduciamo che l'equazione data

$$2 \arctan(|1-x|) + x = \frac{\pi}{2}$$

ha due soluzioni.

3.2) Per esercizio: determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\arctan(|x-1|) + \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}.$$

3.3) Determinare il numero di soluzioni in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dell'equazione

$$\frac{e^{|x-1|}}{x} = 2.$$

Possibile svolgimento. Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{e^{|x-1|}}{x}.$$

Abbiamo allora che $x \neq 0$ è una soluzione dell'equazione data se e solo se

$$f(x) = 2.$$

Quindi il problema proposto si riconduce alla determinazione delle intersezioni del grafico della funzione $y = f(x)$ con la retta orizzontale $y = 2$.

La funzione f ha come dominio l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$, insieme in cui è continua (giustificare questa affermazione); per studiarla riscriviamola nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1}}{x} & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{e^{1-x}}{x} & \text{se } x < 1, x \neq 0. \end{cases}$$

Studiamone il segno; a questo scopo la riscriviamo così:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e} & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{e}{xe^x} & \text{se } x < 1, x \neq 0. \end{cases}$$

Essendo $e^x > 0$ per ogni x , si vede che $f(x)$ ha lo stesso segno di x : si ha quindi $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$; in particolare la funzione f non è mai nulla. Calcoliamo i limiti di f agli estremi del suo dominio: si trova subito $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$. Abbiamo poi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ per la gerarchia degli infiniti.

Per studiare la monotonia di f calcoliamone la derivata prima in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (lo studio della derivabilità in $x_0 = 1$ è lasciato per esercizio). Per $x < 1, x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = D \left(\frac{e^{1-x}}{x} \right) = \frac{-(x+1)e^{1-x}}{x^2}$$

e analogamente per $x > 1$ si ha

$$f'(x) = D \left(\frac{e^{x-1}}{x} \right) = \frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2}.$$

Ne deduciamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2} & \text{se } x > 1 \\ \frac{-(x+1)e^{1-x}}{x^2} & \text{se } x < 1, x \neq 0. \end{cases}$$

Studiamo il segno di $f'(x)$. Osserviamo subito che $f'(x) > 0$ per $x > 1$; mentre, per $x < 1$ e $x \neq 0$, $f'(x)$ ha lo stesso segno di $-(x+1) = -x-1$. Abbiamo così $f'(x) > 0$ per $x < -1$ (oltre che per $x > 1$), e $f'(x) < 0$ per $-1 < x < 0$ e $0 < x < 1$; $f'(x) = 0$ per $x = -1$. Perciò la funzione f è crescente nei due intervalli illimitati $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$, ed è decrescente nei due intervalli aperti $(-1, 0)$ e $(0, 1)$. Ne segue che per $x = -1$ la funzione data ammette un valore massimo relativo dato da $f(-1) = -e^2$, mentre per $x = 1$ la funzione data ammette un valore minimo relativo dato da $f(1) = 1$. Infine il comportamento per $x \rightarrow 0$ è stato studiato in precedenza.

Un semplice studio del grafico permette di determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{e^{|x-1|}}{x} = \alpha.$$

Si ha infatti:

- $\alpha < -e^2 \Rightarrow$ ci sono 2 soluzioni (entrambe negative);
- $\alpha = -e^2 \Rightarrow$ c'è una sola soluzione ($x = -1$);
- $1 < \alpha < 1 \Rightarrow$ non ci sono soluzioni;
- $\alpha = 1 \Rightarrow$ c'è una sola soluzione ($x = -1$);
- $\alpha > 1 \Rightarrow$ ci sono 2 soluzioni (entrambe positive).

In particolare ne deduciamo che l'equazione data

$$\frac{e^{|x-1|}}{x} = 2$$

ha due soluzioni; possiamo anche aggiungere che queste soluzioni saranno una compresa tra 0 e 1 e l'altra maggiore di 1 (giustificare questa affermazione).

3.4) Per esercizio: determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{e^{|1-x|}}{x} = -2.$$

4.1) Calcolare l'integrale $\int_9^{16} \frac{1}{x(\sqrt{x}-2)} dx$.

Possibile svolgimento. Calcoliamo prima di tutto l'integrale indefinito $\int \frac{1}{x(\sqrt{x}-2)} dx$ tramite la sostituzione razionalizzante $y = \sqrt{x}$. Si ha $x = y^2$, da cui $dx = 2y dy$ e perciò

$$\int \frac{1}{x(\sqrt{x}-2)} dx = \int \frac{2y}{y^2(y-2)} dy = \int \frac{2}{y(y-2)} dy.$$

Per calcolare l'integrale della funzione razionale $\frac{2}{y(y-2)}$, determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{2}{y(y-2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-2}.$$

Si ottiene $A = -1$ e $B = 1$ e quindi

$$\int \frac{2}{y(y-2)} dy = -\int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{y-2} dy = -\log|y| + \log|y-2| + c = \log \frac{|y-2|}{|y|} + c.$$

Tornando poi alla variabile x si ha

$$\int \frac{1}{x(\sqrt{x}-2)} dx = \log \frac{|\sqrt{x}-2|}{\sqrt{x}} + c.$$

Passando infine all'integrale definito, si trova

$$\int_9^{16} \frac{1}{x(\sqrt{x}-2)} dx = \log \frac{3}{2}$$

(verificare per esercizio sfruttando le proprietà dei logaritmi).

In alternativa si poteva operare il cambiamento di variabile $y = \sqrt{x}$ nell'integrale definito ottenendo

$$\int_9^{16} \frac{1}{x(\sqrt{x}-2)} dx = \int_3^4 \frac{2}{y(y-2)} dy = \log \frac{3}{2}$$

(verificare per esercizio).

4.2) Per esercizio: verificare che

$$\int_1^4 \frac{1}{x(\sqrt{x}+2)} dx = \log \frac{3}{2}.$$

4.3) Calcolare l'integrale $\int_{\log(5)}^{\log(7)} \frac{6e^x}{e^{2x}-9} dx$.

Possibile svolgimento. Calcoliamo prima di tutto l'integrale indefinito $\int \frac{6e^x}{e^{2x}-9} dx$ tramite la sostituzione razionalizzante $y = e^x$. Si ha $dy = e^x dx$ e perciò

$$\int \frac{6e^x}{e^{2x}-9} dx = \int \frac{6}{y^2-9} dy = \int \frac{6}{(y-3)(y+3)} dy.$$

Per calcolare l'integrale della funzione razionale $\frac{6}{(y-3)(y+3)}$, determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{6}{(y-3)(y+3)} = \frac{A}{y-3} + \frac{B}{y+3}.$$

Si ottiene $A = 1$ e $B = -1$ e quindi

$$\int \frac{6}{(y-3)(y+3)} dy = \int \frac{1}{y-3} dy - \int \frac{1}{y+3} dy = \log |y-3| - \log |y+3| + c = \log \frac{|y-3|}{|y+3|} + c.$$

Tornando poi alla variabile x si ha

$$\int \frac{6e^x}{e^{2x}-9} dx = \log \frac{|e^x-3|}{|e^x+3|} + c.$$

Passando infine all'integrale definito, ricordando l'identità $e^{\log(r)} = r$ valida per ogni numero reale positivo r , si trova

$$\int_{\log(5)}^{\log(7)} \frac{6e^x}{e^{2x}-9} dx = \log \frac{4}{10} - \log \frac{2}{8} = \log \frac{8}{5}$$

(verificare per esercizio sfruttando le proprietà dei logaritmi).

In alternativa si poteva operare il cambiamento di variabile $y = e^x$ nell'integrale definito ottenendo

$$\int_{\log(5)}^{\log(7)} \frac{6e^x}{e^{2x}-9} dx = \int_5^7 \frac{6}{y^2-9} dy = \log \frac{8}{5}$$

(verificare per esercizio).

4.2) Per esercizio: verificare che

$$\int_{\log(4)}^{\log(6)} \frac{4e^x}{e^{2x}-4} dx = \log \frac{3}{2}.$$

5.1) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}y(x) = \cos(x) \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0. \end{cases}$$

Possibile svolgimento. Determiniamo per prima cosa l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}y(x) = \cos(x)$$

in un intorno del punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$. A questo scopo prima di tutto calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx.$$

Si tratta di un integrale immediato in quanto $D(\sin(x)) = \cos(x)$. Si ha dunque

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \log |\sin(x)|$$

(attenzione al modulo!). Tenendo conto del fatto che x varia in un intorno di $x_0 = \frac{\pi}{4}$, possiamo limitarci a considerare l'equazione differenziale nell'intervallo $(0, \pi)$; notiamo infatti che $\sin(x) > 0$ per ogni $x \in (0, \pi)$. Dunque possiamo liberarci del valore assoluto nell'integrale indefinito:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \log |\sin(x)| = \log(\sin(x)), \quad x \in (0, \pi).$$

Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione differenziale data per $e^{\log(\sin(x))} = \sin(x)$, si ottiene la seguente equazione ad essa equivalente:

$$D(\sin(x)y(x)) = \sin(x) \cos(x)$$

Calcoliamo l'integrale immediato

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = \int \frac{\sin(2x)}{2} dx = -\frac{\cos(2x)}{4} + c.$$

Concludiamo che l'equazione differenziale data ammette, nell'intervallo $(0, \pi)$, il seguente integrale generale:

$$y(x) = \frac{-\frac{1}{4} \cos(2x) + c}{\sin(x)}.$$

Infine, per determinare la soluzione del problema di Cauchy, ricaviamoci il valore della costante c imponendo che valga la condizione $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Si trova $c = 0$. La soluzione del problema di Cauchy assegnato è quindi

$$y(x) = \frac{-\frac{1}{4} \cos(2x)}{\sin(x)} = -\frac{\cos(2x)}{4 \sin(x)}.$$

In alternativa si poteva applicare la formula risolutiva per equazioni differenziali lineari del primo ordine (svolgere i calcoli per esercizio); infine, in questo tipo di esercizi si richiede di eseguire la verifica che la funzione trovata risolve il problema di Cauchy assegnato.

5.2) Per esercizio: determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}y(x) = \sin(x) \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0. \end{cases}$$

5.3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{1}{3x}y(x) = 1 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Possibile svolgimento. Determiniamo per prima cosa l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) + \frac{1}{3x}y(x) = 1$$

in un intorno del punto $x_0 = 1$. A questo scopo prima di tutto calcoliamo l'integrale immediato

$$\int \frac{1}{3x} dx = \frac{1}{3} \log|x|$$

(attenzione al modulo!). Tenendo conto del fatto che x varia in un intorno di $x_0 = 1$, possiamo limitarci a considerare l'equazione differenziale nella semiretta $(0, +\infty)$; dunque possiamo liberarci del valore assoluto nell'integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{3x} dx = \frac{1}{3} \log(x), \quad x \in (0, +\infty).$$

Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione differenziale data per $e^{\frac{1}{3}\log(x)} = x^{\frac{1}{3}}$, si ottiene la seguente equazione ad essa equivalente:

$$D(x^{\frac{1}{3}}y(x)) = x^{\frac{1}{3}}$$

Calcoliamo l'integrale immediato

$$\int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c.$$

Concludiamo che l'equazione differenziale data ammette, nell'intervallo $(0, +\infty)$, il seguente integrale generale:

$$y(x) = \frac{\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Infine, per determinare la soluzione del problema di Cauchy, ricaviamoci il valore della costante c imponendo che valga la condizione $y(1) = 0$. Si trova $\frac{3}{4} + c = 0$, da cui $c = -\frac{3}{4}$. La soluzione del problema di Cauchy assegnato è quindi

$$y(x) = \frac{\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{4} \left(x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right).$$

In alternativa si poteva applicare la formula risolutiva per equazioni differenziali lineari del primo ordine (svolgere i calcoli per esercizio); infine, in questo tipo di esercizi si richiede di eseguire la verifica che la funzione trovata risolve il problema di Cauchy assegnato.

5.4) Per esercizio: determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{1}{2x}y(x) = 1 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$