Corso di Laurea in Scienze Biologiche
Prova scritta di Matematica (A) del 06/04/2006

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ____

1) Determinare $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)+\log(1-x)-1+e^{x^2}}{x(1-\cos(x))}$.

Possibile svolgimento. Il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Calcoliamolo utilizzando ripetutamente il Teorema di de l'Hopital. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)+\log(1-x)-1+e^{x^2}}{x(1-\cos(x))} =^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}+2xe^{x^2}}{1-\cos(x)+x\sin(x)} \quad \left(=\left[\frac{0}{0}\right]\right)$$

$$=^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1-x)^2}+2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}{2\sin(x)+x\cos(x)} \quad \left(=\left[\frac{0}{0}\right]\right)$$

$$=^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{(1+x)^3}-\frac{2}{(1-x)^3}+12xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}}{3\cos(x)-x\sin(x)} = \frac{2-2}{3} = 0$$

2) Determinare se è continua e derivabile in $x_0 = 2$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1-\cos(x-2) & x \le 2 \\ e^{\frac{1}{2-x}} & x > 2. \end{cases}$$

Possibile svolgimento. Osserviamo che $f(2) = 1-\cos(0) = 1-1 = 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{2-x}} = 0.$$

Infatti, per la continuità della funzione esponenziale, da

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2-x} \quad \left(=\left[\frac{1}{0^-}\right]\right) = -\infty$$

(attenzione al segno!) si ottiene

$$\lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{2-x}} = 0.$$

In alternativa si può operare la sostituzione $y = 2-x$, osservando che $x \to 2^+$ se e solo se $y \to 0^-$, e si ottiene il limite notevole

$$\lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{2-x}} = \lim_{y\to 0^-} e^{\frac{1}{y}} = 0.$$

In conclusione la funzione data è continua in $x_0 = 2$.

Calcoliamone la derivata in $I\!R \setminus \{2\}$. Per $x < 2$ si ha $f'(x) = \mathrm{D}(1 - \cos(x-2)) = \sin(x-2)$, mentre per $x > 2$ si ha

$$f'(x) = \mathrm{D}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2-x}}\right) = \frac{1}{(2-x)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2-x}}.$$

Quindi abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} \sin(x-2) & x < 2, \\ \dfrac{1}{(2-x)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2-x}} & x > 2. \end{cases}$$

Si ha dunque $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = 0$ e inoltre

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(2-x)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2-x}} = 0.$$

Infatti, posto $y = 2 - x$, si ottiene un limite notvole:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(2-x)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2-x}} = \lim_{y\to 0^-} \frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{y}} = 0.$$

Ne deduciamo che la derivata destra e la derivata sinistra in $x_0 = 2$ sono uguali. Concludiamo allora che la funzione f è continua e derivabile in $x_0 = 2$ con $f'(2) = 0$.

3) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$(1-x)\mathrm{e}^x = 1.$$

Possibile svolgimento. Si consideri la funzione $f : I\!R \to I\!R$, $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^x = 1$. Evidentemente x è una soluzione dell'equazione data se e solo se vale $f(x) = 1$. Non è difficile studiare la funzione f; innanzitutto notiamo che f è continua e derivabile su $I\!R$. Studiamone il segno: si trova che $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$ e $f(x) > 0$ per $x < 1$ e $f'(x) < 0$ per $x > 1$. Inoltre

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Per studiare la monotonia di f calcoliamone la derivata prima:

$$f'(x) = \mathrm{D}\left((1-x)\mathrm{e}^x\right) = -\mathrm{e}^x + (1-x)\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x.$$

Studiamone il segno: essendo $\mathrm{e}^x > 0$ per ogni x, se ne deduce che $f'(x) > 0$ per $x < 0$ e $f'(x) > 0$ per $x > 0$. Dunque la funzione f risulta crescente nell'intervallo $\{x < 0\}$ e decrescente in $\{x > 0\}$ e ammette un massimo relativo, che è anche massimo assoluto, per $x = 0$; in tale punto il valore della funzione è proprio $f(0) = 1$. Ne segue che l'equazione data ha esattamente una soluzione: $x = 0$.

4) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1+3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Possibile svolgimento. Calcoliamo prima di tutto l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{1+3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Tramite decomposizione in somma otteniamo

$$\int \frac{1+3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Il primo è un integrale immediato e vale

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin(x) + c.$$

Il secondo è riconducibile ad un integrale immediato del tipo

$$\int \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)\, dx = \sqrt{f(x)} + c.$$

Si ha infatti

$$\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -3\sqrt{1-x^2} + c.$$

In alternativa per il calcolo di quest'ultimo integrale si può operare il cambio di variabile $t = x^2$; si ottiene quindi $dt = 2x\, dx$, da cui

$$\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-t}}\, dt = \frac{3}{2} \int (1-t)^{-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{3}{2}(-2)(1-t)^{\frac{1}{2}} + c.$$

Tornando poi alla variabile x si trova

$$\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -3\sqrt{1-x^2} + c.$$

Passando infine all'integrale definito, si ha

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1+3x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \left[\arcsin(x) - 3\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 3\sqrt{1-\frac{1}{2}} - \arcsin(0) + 3 = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{\sqrt{2}} + 3.$$

5) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{x} y(x) - \dfrac{\log(x)}{x^2} \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Possibile svolgimento. Calcoliamo prima di tutto l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{1}{x} y(x) - \frac{\log(x)}{x^2}.$$

A questo scopo osserviamo che una primitiva di $-\dfrac{1}{x}$ è $-\log(x)$; possiamo supporre $x > 0$ in quanto ci interessa risolvere l'equazione differenziale in $(0, +\infty)$, intervallo che contiene il punto $x = 1$. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione differenziale data per $\mathrm{e}^{-\log(x)} = \dfrac{1}{x}$, si ottiene la seguente equazione ad essa equivalente:

$$\mathrm{D}\left(\frac{y(x)}{x}\right) = -\frac{\log(x)}{x^3}.$$

Ci siamo così ricondotti al calcolo dell'integrale

$$-\int \frac{\log(x)}{x^3}\, dx.$$

Conviene integrare per parti, scegliendo $f(x) = \log(x)$ come fattore finito e $g'(x) = \frac{1}{x^3}$ come fattore differenziale. Si ha quindi $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = -\frac{1}{2x^2}$. Ne segue

$$-\int \frac{\log(x)}{x^3}\,dx = \log(x)\frac{1}{2x^2} - \int \frac{1}{2x^3}\,dx.$$

Quest'ultimo integrale è un integrale immediato:

$$-\int \frac{1}{2x^3}\,dx = \frac{1}{4x^2}.$$

In conclusione l'integrale generale dell'equazione differenziale è:

$$y(x) = x\left(\frac{\log(x)}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + c\right) = \frac{\log(x)}{2x} + \frac{1}{4x} + cx.$$

Infine la soluzione del problema di Cauchy si trova imponendo la condizione $y(1) = 0$. Si ottiene così $y(1) = \frac{1}{4} + c = 0$, da cui $c = -\frac{1}{4}$. Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{\log(x)}{2x} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4}x.$$