

Corso di Laurea in Scienze Biologiche
Prova scritta di Matematica (A) del 14/02/2006

COGNOME _____ NOME _____

MATRICOLA _____

1) Determinare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+5x} - \cos(2x) - \arctan(x)}{x^3}.$$

Possibile svolgimento. Il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Calcoliamolo utilizzando ripetutamente il Teorema di de l'Hopital. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+5x)^{\frac{1}{5}} - \cos(2x) - \arctan(x)}{x^3} &= {}^{(H)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+5x)^{-\frac{4}{5}} + 2 \sin(2x) - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} \quad \left(= \left[\frac{0}{0}\right] \right) \\ &= {}^{(H)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4(1+5x)^{-\frac{9}{5}} + 4 \cos(2x) + \frac{2x}{(1+x^2)^2}}{6x} \quad \left(= \left[\frac{0}{0}\right] \right) \\ &= {}^{(H)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{36(1+5x)^{-\frac{14}{5}} - 8 \sin(2x) + \frac{2(1+x^2)^2 - 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}}{6} = \frac{38}{6} = \frac{19}{3}. \end{aligned}$$

2) Determinare per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ è continua e derivabile in $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{e^{x^2}} & x > 0, \\ \alpha e^x + \beta \cos(x) & x \leq 0. \end{cases}$$

Possibile svolgimento. Osserviamo che $f(0) = \alpha + \beta = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{e^{x^2}} = 1.$$

Perciò la funzione data è continua in $x_0 = 0$ se e solo se $\alpha + \beta = 1$. Calcoliamone la derivata in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per $x < 0$ si ha $f'(x) = D(\alpha e^x + \beta \cos(x)) = \alpha e^x - \beta \sin(x)$, mentre per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = D\left(\frac{x+1}{e^{x^2}}\right) = \frac{e^{x^2} - 2x(x+1)e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \frac{e^{x^2}(1 - 2x - 2x^2)}{e^{2x^2}}.$$

Quindi abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1 - 2x - 2x^2}{e^{x^2}} & x > 0, \\ \alpha e^x - \beta \sin(x) & x < 0. \end{cases}$$

Si ha dunque $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \alpha$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2x - 2x^2}{e^{x^2}} = 1.$$

Ne deduciamo che la derivata destra e la derivata sinistra in $x_0 = 0$ sono uguali se e solo se $\alpha = 1$. Assunto allora $\alpha + \beta = 1$, condizione che garantisce la continuità in $x_0 = 0$ di f , la funzione f risulta derivabile in $x_0 = 0$ per $\alpha = 1$. Concludiamo allora che per $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ la funzione f è continua e derivabile in $x_0 = 0$ con $f'(0) = 1$.

3) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\arctan(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

Possibile svolgimento. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x) - \frac{x^2}{x^2 + 1}$. Evidentemente x è una soluzione dell'equazione data se e solo se vale $f(x) = 0$. Quindi il problema proposto si riconduce alla determinazione degli zeri della funzione f .

Notiamo che f è continua e derivabile su \mathbb{R} . Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} - 1 < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\frac{\pi}{2} - 1 > 0.$$

Per il teorema degli zeri deduciamo che la funzione f ammette almeno uno zero in \mathbb{R} .

Per studiare la monotonia di f calcoliamone la derivata prima:

$$f'(x) = D \left(\arctan(x) - \frac{x^2}{x^2 + 1} \right) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{2x(x^2 + 1) - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Studiamone il segno. Osserviamo che il denominatore $(x^2 + 1)^2$ è sempre positivo, mentre il denominatore $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2$ si annulla solo per $x = 1$ ed è positivo per ogni $x \neq 1$. Se ne deduce che $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 1$ e $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

In conclusione la funzione f è crescente su tutto \mathbb{R} , per cui f ammette un solo zero in \mathbb{R} . Dunque l'equazione data ha esattamente una soluzione.

Notiamo infine che, essendo $f(0) = 0$, l'unica soluzione dell'equazione data è $x = 0$.

4) Calcolare l'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x) \cos(2x) dx$.

Possibile svolgimento. Calcoliamo prima di tutto l'integrale indefinito $\int \sin(3x) \cos(2x) dx$ tramite integrazione per parti. Scegliamo $f(x) = \sin(3x)$ come fattore finito e $g'(x) = \cos(2x)$ come fattore differenziale. Si ha quindi $f'(x) = 3 \cos(3x)$ e $g(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$. Ne segue

$$\int \sin(3x) \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(3x) \sin(2x) - \frac{3}{2} \int \cos(3x) \sin(2x) dx.$$

Analogamente,

$$\int \cos(3x) \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(3x) \cos(2x) - \frac{3}{2} \int \sin(3x) \cos(2x) dx.$$

Da cui

$$-\frac{5}{4} \int \sin(3x) \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(3x) \sin(2x) + \frac{3}{4} \cos(3x) \cos(2x)$$

e

$$\int \sin(3x) \cos(2x) dx = -\frac{2}{5} \sin(3x) \sin(2x) - \frac{3}{5} \cos(3x) \cos(2x).$$

Passando infine all'integrale definito, si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x) \cos(2x) dx = \left[-\frac{2}{5} \sin(3x) \sin(2x) - \frac{3}{5} \cos(3x) \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{5}.$$

Notiamo che un altro possibile svolgimento di questo esercizio consiste nell'utilizzare la formula

$$\sin(\alpha x) \cos(\beta x) = \frac{1}{2} (\sin((\alpha + \beta)x) + \sin((\alpha - \beta)x)),$$

che permette di trasformare l'integrale indefinito $\int \sin(\alpha x) \cos(\beta x) dx$ nella somma di due integrali immediati. Nel nostro caso si ha

$$\sin(3x) \cos(2x) = \frac{1}{2} (\sin(5x) + \sin(x)).$$

Per esercizio calcolare l'integrale indefinito $\int \sin(3x) \cos(2x) dx$ con questo procedimento e verificare che si ottiene lo stesso risultato trovato nell'altro modo.

5) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2 \sin(2x)}{2 + \cos(2x)} y(x) + \sin(x).$$

Possibile svolgimento. Calcoliamo prima di tutto l'integrale indefinito

$$- \int \frac{2 \sin(2x)}{2 + \cos(2x)} dx.$$

Si tratta di un integrale immediato in quanto $D(2 + \cos(2x)) = -2 \sin(2x)$. Si ha dunque

$$- \int \frac{2 \sin(2x)}{2 + \cos(2x)} dx = \log(2 + \cos(2x)).$$

Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione differenziale data per $e^{\log(2 + \cos(2x))} = 2 + \cos(2x)$, si ottiene la seguente equazione ad essa equivalente:

$$D(2 + \cos(2x)y(x)) = (2 + \cos(2x)) \sin(x).$$

Ci siamo così ricondotti al calcolo dell'integrale

$$\int (2 + \cos(2x)) \sin(x) dx.$$

Tenendo conto che $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$, si può trasformare questo integrale in un integrale immediato:

$$\int (2 + \cos(2x)) \sin(x) dx = \int (1 + 2 \cos^2(x)) \sin(x) dx = -\cos(x) - \frac{2}{3} \cos^3(x) + c.$$

Infine l'integrale generale dell'equazione data è:

$$y(x) = \frac{-\cos(x) - \frac{2}{3} \cos^3(x) + c}{2 + \cos(2x)}.$$