

**Esercizio 1.** Nel piano, oltre a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $(O, x, y)$ , si considerino le coordinate  $(q_1, q_2)$  definite da

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \\ q_2 = xy \end{cases}$$

- A) Verificare che si tratta effettivamente di un sistema di coordinate locali (con l'eccezione di un punto: quale?).
- B) Verificare che le linee coordinate sono perpendicolari tra loro.
- C) Determinare le trasformazioni inverse.
- D) Esprimere l'energia cinetica di un punto materiale ( $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ ) nelle coordinate lagrangiane  $(q_1, q_2)$ .
- E) Trovare un aperto (nel piano  $(O, x, y)$ ) su cui  $(q_1, q_2)$  sono un sistema di coordinate globali.

**Esercizio 2.** Come l'Esercizio 1 (tranne il punto E) per le coordinate  $(u, v)$  definite da

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$$

dove la coppia  $(x, y)$  appartiene al primo quadrante:  $x > 0, y > 0$ .