8 Sistemi vincolati e coordinate lagrangiane

8.1 L'aspetto geometrico

Consideriamo n punti materiali $(P_1, \ldots, P_n)$ con masse rispettivamente $(m_1, \ldots, m_n)$. Il vettore $\mathbf{X} = (x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) \in \mathcal{R}^{3n}$ (dove (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, n$ sono le coordinate del punto P_i) è il *vettore rappresentativo* delle posizioni del sistema.
I punti possono essere soggetti a delle limitazioni nelle configurazioni. Questo fatto si traduce modellisticamente nello scrivere le *equazioni vincolari*:

$$f_k(\mathbf{X}, t) = 0, \quad k = 1, \ldots, m < 3n \tag{8.1}$$

I vincoli di tipo (8.1) vengono detti *olonomi*, nel senso che non coinvolgono le derivate delle variabili.
Se non c'è dipendenza esplicita dal tempo t, il vincolo si dice *fisso* (o *scleronomo*), altrimenti *mobile* (o *reonomo*).
La proprietà fondamentale che richiediamo è che la *matrice jacobiana* delle funzioni f_k rispetto alle $3n$ variabili $(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$, ossia la matrice $m \times 3n$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial z_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} & \dfrac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

(vedi paragrafo 1.4.5 delle dispense di teoria) abbia rango massimo, cioè m.
Se definiamo il *gradiente* in $\mathcal{R}^{3n}$ della funzione f_k come

$$\nabla_{\mathbf{X}} f_k = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}, \frac{\partial f_k}{\partial y_1}, \frac{\partial f_k}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f_k}{\partial x_n}, \frac{\partial f_k}{\partial y_n}, \frac{\partial f_k}{\partial z_n} \right)$$

la condizione di rango massimo equivale a richiedere che i vettori $\nabla_{\mathbf{X}} f_k$, $k = 1, \ldots, m$ (che corrispondono alle righe della matrice jacobiana) siano *linearmente indipendenti.* Notiamo che l'operatore $\nabla_{\mathbf{X}}$ definisce un campo vettoriale da $\mathcal{R}^{3n}$ in $\mathcal{R}^{3n}$.
Gli m vettori $\nabla_{\mathbf{X}} f_k$ di $\mathcal{R}^{3n}$ definiscono in ogni punto un sottospazio vettoriale di dimensione m (essendo fra loro indipendenti), che si dice *spazio normale.* Inoltre, la proprietà di rango massimo (o di indipendenza dei vettori gradiente) permette, in virtù del teorema del Dini, di esprimere il vettore posizione mediante $l = 3n - m$ coordinate $(q_1, \ldots, q_l)$, che vengono dette *coordinate lagrangiane*:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(q_1, \ldots, q_l, t). \tag{8.2}$$

La presenza esplicita del tempo è legata unicamente alla eventuale natura mobile del vincolo.
E' importante osservare che le coordinate lagrangiane variano liberamente in un aperto $Q \subseteq \mathcal{R}^l$, mentre l'utilizzo della variabile $\mathbf{X} \in \mathcal{R}^{3n}$ si porterebbe dietro la verifica delle condizioni (8.1). Il numero l si corrisponde ai *gradi di libertà* del sistema di punti.
Sempre in conseguenza del teorema del Dini, si ha che gli l vettori di $\mathcal{R}^{3n}$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}, \frac{\partial y_1}{\partial q_i}, \frac{\partial z_1}{\partial q_i}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial q_i}, \frac{\partial y_n}{\partial q_i}, \frac{\partial z_n}{\partial q_i} \right) \tag{8.3}$$

sono anch'essi *linearmente indipendenti.* I vettori (8.3) definiscono in ogni punto un sottospazio vettoriale di $\mathcal{R}^{3n}$ di dimensione l (pari dunque al numero dei gradi di libertà del sistema) che si chiama *spazio tangente.*

Esercizio 8.1 *Ricordando che la definizione di prodotto scalare in* $\mathcal{R}^{3n}$ *è* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + \cdots + a_{3n} b_{3n}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{R}^{3n}$, *verificare che ogni vettore dello spazio normale è ortogonale (cioè è nullo il prodotto scalare) con ogni vettore dello spazio tangente [suggerimento: derivare la (8.1) rispetto a* q_i, *per ottenere* $\nabla_{\mathbf{X}} f_k \cdot \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} = 0$, $k = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots l$].

Il risultato dell'esercizio precedente ci permette di concludere che lo spazio tangente è il *complemento ortogonale* dello spazio normale: la definizione dello spazio tangente non risente dunque delle particolari coordinate lagrangiane prescelte.

Esercizio 8.2 *Considerare il caso di un punto vincolato su una curva ($n = 1$, $m = 2$). Tradurre il vincolo in termini di equazioni del tipo (8.1). Spiegare a cosa corrisponde l'ipotesi di regolarità della matrice jacobiana. Introdurre un parametro lagrangiano ($l = 3n - m = 1$). Mostrare che in ogni punto lo spazio tangente è dato dalla retta tangente alla curva e lo spazio normale dal piano normale (piano che contiene il versore normale* $\mathbf{n}$ *e il versore binormale* $\mathbf{b}$*).*

Esercizio 8.3 *Ripetere le considerazioni per il caso di un punto vincolato su una superficie ($n = 1$, $m = 1$). Mostrare che lo spazio normale in ogni punto è dato dal vettore gradiente della superficie, mentre lo spazio tangente è il piano tangente alla superficie.*

Esercizio 8.4 *Formulare in equazioni le seguenti limitazioni vincolari, stabilendo se si tratta di vincoli fissi o mobili:*

(*i*) *un punto P_1 su una parabola contenuta in un piano verticale;*

(*ii*) *un punto P_1 su una sfera di raggio r, centrata in un punto O fisso;*

(*iii*) *un punto su una circonferenza verticale di raggio $r(t)$ che aumenta linearmente col tempo e il cui centro ha ascissa costante e quota che aumenta con la stessa legge del raggio;*

(*iv*) *un punto P_1 vincolato su un piano verticale e a distanza r da un punto fisso O appartenente al piano, un punto P_2 sul medesimo piano e a distanza r_1 da P_1;*

(*v*) *un punto P_1 vincolato su un cilindro circolare retto di raggio R e con asse verticale, un punto P_2 sull'asse del cilindro, con la stessa quota di P_2;*

(*vi*) *un punto P_1 su un piano orizzontale, che si muove verticalmente (mantenendosi parallelo a se stesso) a velocità costante, un punto P_2 su una retta del piano passante per P_1;*

(*vii*) *un punto su una retta verticale r e un punto P_2 su un piano verticale passante per r, che ruota a velocità angolare costante ω intorno a r, con P_2 a distanza fissa r da P_1;*

(*viii*) *tre punti P_1, P_2 e P_3, ciascuno su una di tre rette complanari, passanti per un medesimo punto O.*

Trovare in ciascun caso lo spazio normale, adeguate coordinate lagrangiane, lo spazio tangente.

8.2 L'aspetto cinematico

Le limitazioni (8.1) sulle configurazioni per il vettore $\mathbf{X}$ comportano ovviamente limitazioni sulle possibili velocità dei punti. Se ad esempio un punto è vincolato su un piano, non ci può essere una componente della velocità del punto normale al piano. Il *vettore rappresentativo delle velocità* in $\mathcal{R}^{3n}$ che riassume le velocità $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$ di tutti i punti è

$$\dot{\mathbf{X}} = (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \tag{8.4}$$

Per comprendere quali sono le velocità ammesse, cioè compatibili con i vincoli, troviamo l'espressione lagrangiana del vettore velocità, derivando $\mathbf{X}(q_1, \ldots, q_l, t)$ rispetto al tempo:

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{d}{dt}\mathbf{X}(q_1(t), \ldots, q_l(t), t) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \tag{8.5}$$

La (8.5) si presta utilmente ad una duplice lettura. Da una parte, si vede che il vettore velocità è somma di due vettori di $\mathcal{R}^{3n}$, il primo dei quali appartiene allo spazio tangente (essendo combinazione lineare dei vettori base (8.3)). Se i vincoli sono fissi, il vettore velocità $\dot{\mathbf{X}}$ si riduce a questo solo termine, altrimenti compare anche il vettore $\partial\mathbf{X}/\partial t$, che è legato al moto del vincolo e si chiama *velocità di trascinamento.* Essa non appartiene necessariamente allo spazio normale (cioè non è necessariamente combinazione lineare dei vettori $\nabla_{\mathbf{X}} f_k$); tuttavia vale la seguente proprietà.

Esercizio 8.5 *Verificare che la proiezione sullo spazio normale della velocità di trascinamento è indipendente dal sistema di coordinate lagrangiane prescelto [suggerimento: derivare le (8.1) rispetto al tempo per trovare*

$$\nabla_{\mathbf{X}} f_k(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0.$$

Notare che la formula appena scritta conferma l'appartenenza del vettore rappresentativo delle velocità allo spazio tangente nel caso dei vincoli fissi. Ricordare che la proiezione di un vettore $\mathbf{a}$ *lungo una direzione* $\mathbf{b}$ *è il vettore* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/\mathbf{b}^2$].

Il secondo aspetto legato alla (8.5) che è importante evidenziare ci ricollega al formalismo degli *spostamenti virtuali* (vedi appunti di teoria). Se infatti pensiamo ai vincoli congelati ad un certo istante t, la (8.5) equivale ad affermare che gli spostamenti virtuali verificano

$$\delta\mathbf{X} = (\delta P_1, \dots, \delta P_n) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} \delta q_i, \tag{8.6}$$

dove gli spostamenti δq_i sono arbitrari. Dunque, gli spostamenti virtuali compatibili con la configurazione istantanea del vincolo in una certa posizione $\mathbf{X}$ sono tutti e soli i vettori che appartengono allo spazio tangente nel punto $\mathbf{X}$.
Osservare che la formula (1.110) (delle dispense del Corso di Teoria) che fornisce le condizioni che devono soddisfare gli spostamenti virtuali δP_i, $i = 1, \dots n$, equivale, nel nostro formalismo, a

$$\nabla_{\mathbf{X}} f_k \cdot \delta\mathbf{X} = 0 \tag{8.7}$$

che conferma l'appartenenza degli spostamenti virtuali allo spazio tangente.
Una volta stabilite le coordinate lagrangiane $(q_1, \dots, q_l)$, la (8.6) rende immediata la scrittura degli spostamenti virtuali.

Esercizio 8.6 *Trovare il vettore rappresentativo delle velocità negli esempi dell'esercizio precedente. Nel caso di vincoli mobili, verificare l'indipendenza della velocità di trascinamento dalla scelta delle coordinate lagrangiane. Scrivere le condizioni (8.7) per gli spostamenti virtuali e determinarli mediante la (8.6).*

Esercizio 8.7 *Un punto* P *è vincolato sul piano* $z = 0$ *e alla circonferenza* $x^2 + (y - v_0 t)^2 - (v_0 t)^2 = 0$, $v_0 > 0$ *costante. Detto* O *il centro della circonferenza, Assumere come coordinata lagrangiana l'angolo che il vettore* $P - O$ *forma con la direzione orizzontale passante per* O*. Determinare spazio normale e spazio tangente, la velocità, quella di trascinamento e verificare che quest'ultima non appartiene allo spazio normale.*

Come è stato visto durante il Corso di Teoria, l'espressione dell'energia cinetica nelle variabili lagrangiane assume la forma di un polinomio di secondo grado rispetto alle veriabili cinetiche $\dot{q}_k$:

$$\begin{aligned} T(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t) &= \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{l} a_{h,k}(q_1, \dots, q_l, t) \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{h=1}^{l} b_h(q_1, \dots, q_l, t) \dot{q}_h + \\ & c(q_1, \dots, q_l, t) = T_2 + T_1 + T_0 \end{aligned} \tag{8.8}$$

dove

$$\begin{aligned} a_{h,k} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \\ b_h &= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \\ c &= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \end{aligned}$$

(si è posto $\mathbf{x}_i$ il vettore (x_i, y_i, z_i) posizione del punto P_i).

Per trovare la (8.8), basta frazionare la (8.5) nelle terne delle componenti dei punti P_i, ciascuna in $\mathcal{R}^3$

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{i=k}^{l} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}$$

e eseguire il conto $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i$.
E' importante notare che in caso di vincoli fissi T si riduce al solo termine T_2 e che la matrice $a_{h,k}$ è *definita positiva.*

8.3 L'aspetto dinamico

Una volta introdotte le forze che agiscono sui vari punti, si possono determinare le equazioni di moto, per la scrittura delle quali rimandiamo ovviamente agli appunti del Corso di Teoria. Anche per le forze, possiamo definire un vettore rappresentativo per le forze direttamente applicate

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n) \in \mathcal{R}^{3n}$$

(dove $\mathbf{F}_i$ è la forza che agisce sul punto P_i), e un vettore rappresentativo delle reazioni vincolari

$$\mathbf{\Phi} = (\mathbf{\Phi}_1, \ldots, \mathbf{\Phi}_n) \in \mathcal{R}^{3n}.$$

E' importante mettere in evidenza che la scrittura della (1.7), nonché la (1.55), la (1.84), la (1.90) e in generale la (1.116) (tutte formule delle dispense del Corso di Teoria) rappresentano secondo il nostro formalismo la proiezione dell'equazione della dinamica sullo spazio tangente. In effetti, moltiplicare per gli spostamenti virtuali significa proiettare lungo le direzioni permesse, cioè quelle nello spazio tangente.
Più precisamente, partiamo dall'equazione (1.55) delle dispense del Corso di Teoria (scritta però nel caso di un sistema vincolato):

$$\sum_{k=1}^{n} (m_k \mathbf{a}_k - \mathbf{F}_k - \mathbf{\Phi}_k) \cdot \delta P_k = 0.$$

Definendo il *vettore rapresentativo della quantità di moto*

$$\mathbf{Q} = (m_1 \mathbf{v}_1, \ldots, m_n \mathbf{v}_n)$$

e ricordando la (8.6), l'equazione precendente si scrive in $\mathcal{R}^{3n}$:

$$\left(\dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{F} - \mathbf{\Phi}\right) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_1} \delta q_1 + \cdots + \left(\dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{F} - \mathbf{\Phi}\right) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_l} \delta q_l = 0 \tag{8.9}$$

Notare che il prodotto scalare della (8.9) è in $\mathcal{R}^{3n}$. Essendo gli spostamenti virtuali δq_i arbitrari, possiamo affermare che la (8.9) equivale a:

$$\dot{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} = (\mathbf{F} + \mathbf{\Phi}) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, l \tag{8.10}$$

La (8.10) evidenzia a sinistra la proiezione delle forze di inerzia sullo spazio tangente, mentre a destra la proiezione delle forze direttamente applicate e quelle vincolari sul medesimo spazio.
Ora, il membro a sinistra della (8.10) verifica

$$\dot{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, l \tag{8.11}$$

dove T è l'energia cinetica, $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i^2$ (osservare che l'energia cinetica può essere scritta, mediante i vettori rappresentativi, come $T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q}$).

Dunque, le equazioni di moto (8.10) si scrivono

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = (\mathbf{F} + \mathbf{\Phi}) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, l, \tag{8.12}$$

che sono l equazioni differenziali del secondo ordine nelle incognite $q_i(t)$, $i = 1, \ldots, l$ (una volta stabilita la dipendenza delle forze vincolari $\mathbf{\Phi}$ dalle incognite e dalle loro derivate).
D'altra parte, è chiaro a questo punto che la definizione di *vincolo liscio* (Definizione 1.4.6), nonché il *principio dei lavori virtuali* ammette come formulazione equivalente

$$\mathbf{\Phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, l, \tag{8.13}$$

cioè le forze vincolari non hanno componente lungo lo spazio tangente, non ostacolano il moto sul vincolo.

Esercizio 8.8 *Mostrare che la (8.13) è equivalente alla condizione*

$$\mathbf{\Phi} = \sum_{i=i}^{m} \lambda_i(\mathbf{X}, t) \nabla f_i(\mathbf{X}, t),$$

con λ_i funzioni scalari.

Nel caso dunque di vincoli lisci (8.6), le equazioni di moto si scrivono:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, l. \tag{8.14}$$

Esercizio 8.9 *Confrontare l'ipotesi di vincolo liscio (8.13) con quella data per il moto di un punto vincolato su una curva.*

Infine, se le forze direttamente applicate sono conservative, si ha che esiste una funzione $U(\mathbf{X})$ tale che $\nabla_{\mathbf{X}} U = \mathbf{F}$ (in $\mathcal{R}^{3n}$). Si può poi introdurre una funzione potenziale nelle variabili lagrangiane $\tilde{U}(q_1, \ldots, q_l) = U(\mathbf{X}(q_1, \ldots, q_l))$ e vale (vedi (1.6.3) delle dispense del Corso di Teoria)

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, l \tag{8.15}$$

Dunque, nel caso di vincoli lisci e forze conservative, le equazioni di moto (8.14) si scrivono

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots l, \tag{8.16}$$

dove

$$\mathcal{L} = T + \tilde{U} \tag{8.17}$$

è la *funzione Lagrangiana.* Essa dipende dalle $q_1, \ldots, q_l$, dalle $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_l$ (presenti in T) e eventualmente dal tempo t (nel caso di vincoli mobili).

Esercizio 8.10 *Dimostrare la (8.11) usando i vettori rappresentativi in $\mathcal{R}^{3n}$ e seguendo questa traccia: si scrive, pensando alla regola di derivazione di un prodotto,*

$$\dot{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{Q} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i}\right) - \mathbf{Q} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, l. \tag{8.18}$$

Verificare poi che

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \mathbf{Q} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, l. \tag{8.19}$$

D'altra parte, dalla (8.5) risulta evidente che

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{X}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, l. \tag{8.20}$$

Mediante la (8.20) dimostrare che

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \mathbf{Q} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, l. \tag{8.21}$$

Sostituendo infine (8.19) e (8.21) nella (8.18), si trova la (8.11).

Esercizio 8.11 *Generalizzando la (8.16), possiamo pensare di essere in presenza di forze direttamente applicate che siano in parte conservative e in parte no:*

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} U + \mathbf{F}_1(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t).$$

Scrivere in questo caso le equazioni di moto, introducendo una Lagrangiana che coinvolge solo la parte conservativa delle forze direttamente applicate.

Esercizio 8.12 *Due punti P_1 e P_2 appartengono ad un piano verticale. Il primo è vincolato su una retta assegnata, il secondo ha distanza dal primo che cresce linearmente nel tempo.*

(*i*) *Scrivere le equazioni vincolari e discutere il rango della matrice jacobiana corrispondente.*

(*ii*) *Introdurre le coordinate lagrangiane e trovare le basi dello spazio normale e tangente.*

(*iii*) *Trovare il vettore rappresentativo delle velocità, verificando che la velocità di trascinamento non appartiene allo spazio normale.*

Introdurre ora i seguenti campi di forze: forza peso, forza elastica fra i due punti e il campo $\mathbf{F}_1 = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j}$.

(*iv*) *Scrivere le equazioni di Lagrange, supponendo che i vincoli siano lisci.*

(*v*) *Scrivere le equazioni di Lagrange, supponendo che P_1 si muove sulla retta con un attrito proporzionale alla velocità: $\mathbf{\Phi}_1 = -\mu \mathbf{v}_1$, $\mu > 0$ costante.*