

## Prova scritta del corso di Sistemi Dinamici CdL Matematica, 27 Settembre 2005

### Esercizio 1.

Sia  $\pi$  un piano orizzontale e  $\mathcal{C}$  una circonferenza su di esso di raggio  $R > 0$ . Un punto  $P_0$  ruota uniformemente su  $\mathcal{C}$  a velocità angolare  $\omega$ .

Si consideri un punto  $P$  di massa  $m$  vincolato ad appartenere alla retta di  $\pi$  tangente a  $\mathcal{C}$  in  $P_0$ . Chiamare  $s$  la distanza con segno di  $P$  da  $P_0$ .

- (i) Scrivere le equazioni vincolari per il sistema costituito dal solo punto  $P$ .
- (ii) Esprimere il vettore posizione  $P - O$  in funzione della coordinata lagrangiana  $s$ .
- (iii) Determinare una base dello spazio normale e una base dello spazio tangente all'insieme delle configurazioni.
- (iv) Calcolare velocità virtuale e velocità di trascinamento del punto  $P$  e determinare le componenti di quest'ultima nello spazio tangente e nello spazio normale.
- (v) Calcolare l'energia cinetica del sistema.
- (vi) Assumendo che il punto sia soggetto unicamente ad una forza riconducibile al potenziale  $U(s)$  e che i vincoli siano lisci, scrivere l'equazione di moto del sistema.
- (vii) Determinare la funzione  $U$  in modo che la distanza di  $P$  da  $P_0$  vari linearmente nel tempo.

*Facoltativo:* Nel caso della  $U$  trovata al punto precedente, si considerino come condizioni iniziali  $s(0) = 0$ ,  $\dot{s}(0) = -\omega R$  e si confronti direzione tangente e normale alla curva traiettoria  $P(t) - O$  con la direzione tangente e normale alla circonferenza nel punto  $P_0(t)$ .

### Esercizio 2.

Sia  $(O, x, y)$  un sistema di riferimento ortogonale di origine  $O$  fissato su un piano verticale  $\Pi$ , con l'asse  $y$  orientato secondo la verticale ascendente. Un'asta omogenea di lunghezza  $\ell > 0$  e massa  $m$  ha gli estremi  $A$  e  $B$  vincolati a scorrere in modo liscio sugli assi  $x = 0$  e  $y = 0$ , rispettivamente. Oltre alla forza peso, sull'asta agisce una forza elastica (costante  $k > 0$ ) che richiama l'estremo  $B$  verso il punto  $C$  di coordinate  $(\lambda, 0)$ ,  $\lambda > 0$ .

- (i) Elencare le forze che agiscono sul sistema, suddividendole in esterne e interne, e in direttamente applicate e reazioni vincolari.
- (ii) Determinare il valore di  $\lambda$  in modo che l'asta sia in equilibrio nella posizione in cui le proiezioni dell'asta sui semiassi  $x \geq 0$ ,  $y \leq 0$  siano di uguale lunghezza.
- (iii) Stabilire il carattere stabile o instabile della posizione di equilibrio determinata.
- (iv) Tornando ad un generico valore  $\lambda$ , scrivere l'energia cinetica e la Lagrangiana del sistema.
- (v) Determinare l'equazione di moto del sistema.
- (vi) Supponendo di aver risolto l'equazione precedente, descrivere il procedimento per calcolare le forze vincolari ad ogni istante  $t$ .

### MODALITÀ:

- Gli studenti che devono sostenere l'esame di **Sistemi Dinamici** (Nuovo Ordinamento), oppure l'intero esame di **Mecchanica Razionale** (Vecchio Ordinamento), svolgono l'intero compito.  
*Tempo a disposizione: 2 ore.*
- Gli studenti che devono sostenere solo il primo o il secondo modulo dell'esame di **Meccanica Razionale** (Vecchio Ordinamento) svolgono il primo o il secondo esercizio, rispettivamente.  
*Tempo a disposizione: 1 ora.*