

Prova scritta del corso di Sistemi Dinamici CdL Matematica, 20 Luglio 2005

Esercizio 1. In un piano orizzontale (O, x, y) un punto materiale P_1 di massa m è vincolato su una circonferenza passante per l'origine O , tangente in O all'asse y e contenuta nel semipiano $x \geq 0$. Il raggio della circonferenza varia secondo la legge nota $r = r(t)$, con $r(t) > 0$ per ogni $t \geq 0$. Sia A il punto distinto da O di intersezione dell'asse orizzontale con la circonferenza. Un secondo punto materiale P_2 di medesima massa m è vincolato sulla retta parallela all'asse y passante per A .

- (i) Scrivere le equazioni vincolari per il sistema costituito dai punti P_1 e P_2 e discutere il rango della matrice jacobiana corrispondente.
- (ii) Stabilito il numero dei gradi di libertà del sistema, introdurre opportune coordinate lagrangiane e determinare il vettore posizione \mathbf{X} delle coordinate cartesiane dei punti in funzione di esse.
- (iii) Determinare una base dello spazio tangente $\mathcal{T}_{\mathbf{X}}$ all'insieme delle configurazioni.
- (iv) Determinare il vettore rappresentativo $\dot{\mathbf{X}}$ delle velocità e stabilire se la velocità di trascinamento $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}$ appartiene allo spazio normale, ovvero al complemento ortogonale di $\mathcal{T}_{\mathbf{X}}$.

Facoltativo: Dette $f_k(\mathbf{X}, t) = 0$, $k = 1, \dots, m$ le equazioni vincolari del sistema, verificare che

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} f_k = -\frac{\partial f_k}{\partial t}, \quad k = 1, \dots, m.$$

- (v) Determinare l'espressione dell'energia cinetica nelle variabili lagrangiane scelte, mettendone in evidenza la struttura di polinomio di secondo grado rispetto alle variabili cinetiche.

Si consideri ora una forza elastica (costante k) di mutua attrazione che agisce sui punti P_1 e P_2 .

- (vi) Scrivere la Lagrangiana del sistema.

Esercizio 2. In un piano orizzontale Π un'asta OA di lunghezza ℓ e massa M ha l'estremo O vincolato a un punto fisso del piano. Inoltre un punto P di massa m è vincolato a muoversi sull'asta OA . Tutti i vincoli sono lisci. Si consideri il sistema formato dall'asta OA e dal punto P e si scelgano come coordinate lagrangiane la lunghezza $s = \overline{OP}$ e l'angolo φ formato dall'asta OA con una direzione prefissata. Sul punto P agisce una forza F_α di richiamo verso il punto O , il cui potenziale nelle coordinate lagrangiane ha l'espressione $U_\alpha = -ks^\alpha$, dove $k > 0$ e $\alpha \geq 2$.

- (i) Elencare le forze che agiscono sul sistema, suddividendole in esterne e interne, e in direttamente applicate e reazioni vincolari.
(Facoltativo). Determinare l'espressione (vettoriale o cartesiana) del campo di forze F_α .
- (ii) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di moto.
- (iii) Verificare che la quantità $I = \left(ms^2 + \frac{1}{3}M\ell^2 \right) \dot{\varphi}$ si mantiene costante durante il moto.
- (iv) Collegare la quantità I ad una grandezza fisica del moto e arrivare alla stessa conclusione del punto precedente mediante la seconda equazione cardinale.
- (v) Discutere al variare del parametro $\alpha \geq 2$ la possibilità di ottenere moti in cui il punto P rimanga fermo rispetto all'asta sulla posizione $s = \bar{s}$, con $0 \leq \bar{s} \leq \ell$.

MODALITÀ:

- Gli studenti che devono sostenere l'esame di **Sistemi Dinamici** (Nuovo Ordinamento), oppure l'intero esame di **Mecanica Razionale** (Vecchio Ordinamento), svolgono l'intero compito.
Tempo a disposizione: 2 ore.
- Gli studenti che devono sostenere solo il primo o il secondo modulo dell'esame di **Meccanica Razionale** (Vecchio Ordinamento) svolgono il primo o il secondo esercizio, rispettivamente.
Tempo a disposizione: 1 ora.