

# Prova scritta del corso di Sistemi Dinamici – Meccanica Razionale

CdL Matematica, 20 Giugno 2005

**Esercizio 1.** Due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  entrambi di massa  $m$  sono vincolati su una parabola di equazione  $z = ax^2$  ( $a > 0$ ) in un piano verticale  $(O, x, z)$ , dove l'asse  $z$  è verticale ascendente. I punti  $P_1$  e  $P_2$  sono soggetti alla forza peso e a una forza elastica di costante  $k$  che richiama l'uno verso l'altro. Inoltre il punto  $P_1$  è collegato al punto  $Q \equiv (0, l), l > 0$ , da una molla di costante elastica  $k > 0$ . Si considerino come coordinate lagrangiane le rispettive ascisse  $x_1$  e  $x_2$  dei punti  $P_1$  e  $P_2$ .

(i) Scrivere la Lagrangiana del sistema.

(ii) Verificare che la configurazione  $\Gamma$  in cui entrambi i punti  $P_1$  e  $P_2$  coincidono con l'origine  $O$  è di equilibrio.

Si introduca il parametro adimensionale  $\alpha = \frac{mga}{k}$ .

(iii) Discutere la stabilità della configurazione  $\Gamma$  nel caso in cui  $l = \frac{1}{a}$ .

(iv) Verificare che nel caso  $l = \frac{1}{2a}$  la configurazione di equilibrio  $\Gamma$  è stabile.

(Facoltativo). Determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno a  $\Gamma$ .

(v) In assenza della forza peso, determinare l'altezza  $l^*$  alla quale si deve porre il punto  $Q$  in modo che, sovrapponendo  $P_1$  e  $P_2$  sulla parabola alla quota assegnata  $h > 0$ , si abbia una configurazione di equilibrio.

**Esercizio 2.** Un'asta  $AB$  di lunghezza  $l = r\sqrt{3}$  e massa  $m$  può muoversi su un piano verticale  $\Pi$ . I due estremi  $A$  e  $B$  dell'asta sono vincolati su una circonferenza del piano di raggio  $r$ . Inoltre un punto  $C$  di massa  $M$  è vincolato sulla stessa circonferenza. Tutti i vincoli sono lisci.

Si consideri il sistema formato dall'asta  $AB$  e dal punto  $C$ . Oltre alla forza peso, sul sistema agisce una forza elastica di costante  $k > 0$  che richiama il punto  $C$  verso il centro di massa  $P_0$  dell'asta  $AB$ .

(i) Sabilire il numero di gradi di libertà del sistema e introdurre opportune coordinate lagrangiane.

(ii) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di moto.

(iii) Elencare le forze che agiscono sul sistema, suddividendole in esterne e interne, e in direttamente applicate e reazioni vincolari.

(iv) Ricordando la formula  $\mathbf{L}(O) = \mathbf{L}(P_0) + (P_0 - O) \wedge \mathbf{Q}$ , scrivere la II equazione cardinale per la sola asta usando come centro di riduzione il punto  $O$  e confrontarla con le equazioni ottenute al punto (iii).

(v) (Facoltativo). Sono possibili moti in cui i punti  $O$ ,  $P_0$  e  $C$  restano allineati?

MODALITÀ:

- Gli studenti che devono sostenere l'esame di **Sistemi Dinamici** (Nuovo Ordinamento), oppure l'intero esame di **Meccanica Razionale** (Vecchio Ordinamento), svolgono l'intero compito.

Tempo a disposizione: 2 ore.

- Gli studenti che devono sostenere solo il primo o il secondo modulo dell'esame di **Meccanica Razionale** (Vecchio Ordinamento) svolgono il primo o il secondo esercizio, rispettivamente.

Tempo a disposizione: 1 ora.