

## Prova scritta del corso di Sistemi Dinamici CdL Matematica, 12 Settembre 2005

### Esercizio 1.

Sia  $\pi$  un piano orizzontale in cui viene fissato un sistema di riferimento  $(x, y)$  di origine  $O$ . Sia  $A$  un punto del piano  $\pi$  di coordinate variabili nel tempo  $(\alpha(t), \beta(t))$ , con  $\alpha(t) > 0$ ,  $\alpha(0) = \gamma\beta(0)$ ,  $\gamma$  costante positiva.

Un punto  $P$  di massa  $m$  è vincolato ad essere equidistante dai punti  $O$  e  $A$ .

Sul punto  $P$  agisce unicamente una forza elastica di costante  $k$  che lo richiama verso  $M$ , punto medio del segmento  $OA$ .

- (i) Scrivere le equazioni vincolari per il punto  $P$ .
- (ii) Scegliendo come coordinata lagrangiana l'ascissa del punto  $P$ , determinare velocità virtuale e velocità di trascinamento del punto  $P$ .
- (iii) Mostrare che la velocità di trascinamento non dipende dalla posizione del punto se e solo se  $\alpha/\beta = \gamma$ .
- (iv) In quest'ultima ipotesi, scrivere la Lagrangiana e l'equazione di moto per il punto.
- (v) Determinare la funzione  $\beta(t)$  in modo che l'ascissa del punto  $P$  compia oscillazioni armoniche di pulsazione  $\sqrt{k/m}$  attorno al punto  $O$ .

*Facoltativo:* Tornando ad una generica funzione  $\beta(t)$ , calcolare l'Hamiltoniana  $H$ .

**Esercizio 2.** Un'asta omogenea di lunghezza  $\ell$  e massa  $m$  è vincolata su un piano orizzontale  $\Pi$ . Sia  $(O, x, y)$  un sistema di riferimento ortogonale su  $\Pi$  di origine  $O$ . Un estremo dell'asta è saldato sul punto  $O$ . Sull'altro estremo  $A$  sono applicate due forze elastiche, la prima di richiamo verso il punto  $(\lambda, 0)$ ,  $\lambda > 0$ , la seconda verso il punto  $A'$ , proiezione ortogonale di  $A$  sull'asse  $y$ . Entrambe le forze hanno costante elastica  $k > 0$ . I vincoli sono lisci.

- (i) Elencare le forze che agiscono sul sistema, suddividendole in esterne e interne, e in direttamente applicate e reazioni vincolari.
- (ii) Determinare le posizioni di equilibrio del sistema, valutando la natura stabile o instabile di esse, al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .
- (iii) Stabilire il valore di  $\lambda$  affinché la posizione in cui l'asta forma un angolo pari a  $\pi/3$  con l'asse  $x$  sia di equilibrio.
- (iv) Tornando ad un generico valore  $\lambda$ , scrivere energia cinetica, Lagrangiana e equazione di moto del sistema.

Considerare ora le condizioni iniziali corrispondenti a  $A \equiv A'$ ,  $A$  sul semiasse  $y < 0$ , velocità angolare iniziale nulla.

- (v) Mostrare che il moto è periodico per  $\lambda \neq \ell/2$ . Cosa avviene se  $\lambda = \ell/2$ ?
- (vi) Nel caso  $\lambda > \ell$ , determinare i punti di inversione del moto.
- (vii) Sempre nel medesimo caso, calcolare la velocità angolare con cui l'asta attraversa l'asse  $x$ .

### MODALITÀ:

- Gli studenti che devono sostenere l'esame di **Sistemi Dinamici** (Nuovo Ordinamento), oppure l'intero esame di **Mecchanica Razionale** (Vecchio Ordinamento), svolgono l'intero compito.  
*Tempo a disposizione: 2 ore.*
- Gli studenti che devono sostenere solo il primo o il secondo modulo dell'esame di **Meccanica Razionale** (Vecchio Ordinamento) svolgono il primo o il secondo esercizio, rispettivamente.  
*Tempo a disposizione: 1 ora.*