12 Le equazioni di Lagrange in un sistema non inerziale

Ci occupiamo ora di trovare le equazioni di Lagrange nel caso in cui il sistema di riferimento rispetto al quale si scrivono le equazioni sia non inerziale, cioè abbia un moto rispetto ad un sistema fisso. Richiamiamo alcuni concetti fondamentali di cinematica e dinamica relativa.

12.1 Cinematica relativa

Consideriamo un sistema di riferimento Σ fisso e S un sistema di riferimento che ha un moto rispetto a Σ. Il sistema S può essere pensato come un sistema rigido, per cui il suo moto rispetto a Σ è completamente descritto dai due vettori caratteristici $\mathbf{v}(O)$, $\underline{\omega}$ (O punto arbitrario, per esemio l'origine del sistema S), nel senso che la velocità $\mathbf{v}_T(P)$ di ogni punto P del sistema rigido S (con S indichiamo indifferentemente il sistema di riferimento e il sistema rigido) è data dalla *formula di Poisson*

$$\mathbf{v}_T(P) = \mathbf{v}(O) + \underline{\omega} \times (P - O) \quad P \in S \tag{12.1}$$

(fra breve sarà chiaro il significato del pedice T).
Se il punto P, anziché essere fermo rispetto a S, ha un moto *moto relativo*, la relazione fra la *velocità assoluta* $\mathbf{v}(P)$ (velocità rispetto a Σ) e la *velocità relativa* $\mathbf{v}_R(P)$ (velocità rispetto a S) è la seguente:

$$\mathbf{v}_(P) = \mathbf{v}_R(P) + \mathbf{v}_T(P) \tag{12.2}$$

con $\mathbf{v}_T(P)$ *velocità di trascinamento* (12.1), corrispondente alla velocità che avrebbe P se partecipasse al moto rigido S. La formula (12.2) si trova scrivendo il vettore $P - O$ in coordinate (rispetto a S):

$$P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{x},$$

dove i versori sono i versori del sistema S, e derivando rispetto al tempo. La velocità relativa corrisponde a derivare le coordinate (x, y, z), pensando ai versori di S e al punto O come fissi:

$$\mathbf{v}_R(P) = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}. \tag{12.3}$$

La velocità di trascinamento corrisponde invece a pensare le coordinate (x, y, z) fisse, come se il punto partecipasse al moto solidale a S:

$$\mathbf{v}_T(P) = \mathbf{v}(O) + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \tag{12.4}$$

(ricordare che $\dfrac{d\mathbf{e}}{dt} = \underline{\omega} \times \mathbf{e}$ se $\mathbf{e}$ è un versore solidale in S).
Con una notazione alternativa, possiamo scrivere:

$$\mathbf{v}(P) = \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)_\Sigma, \tag{12.5}$$

$$\mathbf{v}_R(P) = \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)_S, \tag{12.6}$$

$$\mathbf{v}_T(P) = \left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}\right)_\Sigma, \tag{12.7}$$

dove in (12.5) la derivata è intesa nel sistema Σ (rispetto al quale variano x, y e z, il punto O e i versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$), in (12.6) la derivata è fatta rispetto al sistema S (in cui variano x, y e z, mentre il punto O e i versori non variano) e in (12.7) la presenza esplicita del tempo è nel punto O e nei versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ (e non nelle coordinate x, y e z).
Derivando ancora una volta rispetto al tempo, troviamo l'espressione dell'accelerazione:

$$\mathbf{a}(P) = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_C \tag{12.8}$$

con:

(12.9) $\quad \mathbf{a}_R = \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} + \ddot{z}\,\mathbf{k} \qquad$ *accelerazione relativa*

(12.10) $\quad \mathbf{a}_T = \mathbf{a}(O) + \dot{\underline{\omega}} \times (P - O) + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times (P - O)) \qquad$ *accelerazione di trascinamento*

(12.11) $\quad \mathbf{a}_C = 2\underline{\omega} \times \mathbf{v}_R \qquad$ *accelerazione di Coriolis*

La (12.10) è l'accelerazione che avrebbe il punto se partecipasse al moto rigido di S.

Esempio 12.1 *Consideriamo un sistema S di assi (x, y, z) e versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ che ruota rispetto a Σ, di assi (ξ, η, ζ) e versori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ in modo che gli assi verticali concidano ($z \equiv \zeta$) e la velocità di rotazione sia costante. Inoltre le due origini coincidono: $O \equiv \Omega$.*
Si ha $\underline{\omega} = \omega\mathbf{e}_3$, con ω costante e $\mathbf{v}(O) = 0$. Dunque:

$$\mathbf{v}_R(P) = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

con $\mathbf{i} = \cos\omega t\mathbf{e}_1 + \sin\omega t\mathbf{e}_2$, $\mathbf{j} = -\sin\omega t\mathbf{e}_1 + \cos\omega t\mathbf{e}_2$, $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$,

$$\mathbf{v}_T = \frac{\partial}{\partial t}((x\cos\omega t - y\sin\omega t)\mathbf{e}_1 + (x\sin\omega t + y\cos\omega t)\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_T &= \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times (P - O)) = -\underline{\omega}^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \\ \mathbf{a}_C &= 2\underline{\omega}(-\dot{y}\mathbf{i} + \dot{x}\mathbf{j}) \end{aligned}$$

12.2 Dinamica relativa

Se sul punto P di massa m agisce il campo di forze $\mathbf{F}$, l'equazione $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ valida nel sistema inerziale Σ può essere letta relativamente al sistema S nel seguente modo (pensare a $m(\mathbf{a}_R + \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_C) = \mathbf{F}$):

(12.12)
$$m\mathbf{a}_R = \mathbf{F} + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_C$$

con $\mathbf{F}_T = -m\mathbf{a}_T$ *forza di trascinamento*, $\mathbf{F}_C = -m\mathbf{a}_C$ *forza di Coriolis*. Lo studio del moto nel sistema relativo S consiste dunque nello scrivere l'accelerazione del punto come in (12.9) (l'accelerazione rispetto al sistema S) e aggiungendo, per ottenere il moto effettivo rispetto a Σ, i termini delle cosiddette *forze apparenti* $\mathbf{F}_T$ e $\mathbf{F}_C$, forze fittizie che esprimono la non inerzialità del sistema S.

12.3 Formalismo lagrangiano nei sistemi mobili

Vogliamo ora inquadrare questi concetti nel formalismo lagrangiano.
Consideriamo un sistema di riferimento fisso Σ con origine degli assi nel punto Ω e con $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ come versori ortogonali degli assi ortogonali ξ, η e ζ. Il sistema mobile S ha l'origine degli assi nel punto O e $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ come versori degli assi ortogonali x, y e z.
Indichiamo con $(\xi, \eta, \zeta)_\Sigma$ le coordinate del vettore $(P - \Omega) \equiv \xi\mathbf{e}_1 + \eta\mathbf{e}_2 + \zeta\mathbf{e}_3$. Nel sistema S si ha:

$$(P - O) \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x, y, z)_S.$$

Inoltre, dato che le origini degli assi possono essere distinte:

(12.13)
$$(P - O) = (P - \Omega) + (\Omega - O) = (\xi, \eta, \zeta)_\Sigma - (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)_\Sigma$$

dove $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)_\Sigma$ sono le coordinate di O (in generale variabili nel tempo) rispetto a Σ.
Le relazioni fra i due gruppi di coordinate sono stabilite dalle funzioni che esprimono il cambiamento del sistema:

(12.14)
$$\begin{cases} \mathbf{i} = \alpha_1(t)\mathbf{e}_1 + \beta_1(t)\mathbf{e}_2 + \gamma_1(t)\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{j} = \alpha_2(t)\mathbf{e}_1 + \beta_2(t)\mathbf{e}_2 + \gamma_2(t)\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{k} = \alpha_3(t)\mathbf{e}_1 + \beta_3(t)\mathbf{e}_2 + \gamma_3(t)\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

dove la dipendenza dal tempo dei coseni direttori α_i, β_i, γ_i, $i = 1, 2, 3$, è dovuta al moto di S rispetto a Σ. Si ricorda che la matrice dei coefficienti in (12.14) (la matrice A dei coseni direttori) è una *matrice ortogonale*, cioè $AA^T = I$.
Si ha pertanto dalla (12.13) e dalla (12.14):

$$\begin{cases} \xi - \xi_0(t) = \alpha_1(t)x + \alpha_2(t)y + \alpha_3(t)z \\ \eta - \eta_0(t) = \beta_1(t)x + \beta_2(t)y + \beta_3(t)z \\ \zeta - \zeta_0(t) = \gamma_1(t)x + \gamma_2(t)y + \gamma_3(t)z \end{cases} \tag{12.15}$$

mentre le relazioni inverse sono:

$$\begin{cases} x = \alpha_1(t)(\xi - \xi_0(t)) + \beta_1(t)(\eta - \eta_0(t)) + \gamma_1(t)(\zeta - \zeta_0(t)) \\ y = \alpha_2(t)(\xi - \xi_0(t)) + \beta_2(t)(\eta - \eta_0(t)) + \gamma_2(t)(\zeta - \zeta_0(t)) \\ z = \alpha_3(t)(\xi - \xi_0(t)) + \beta_3(t)(\eta - \eta_0(t)) + \gamma_3(t)(\zeta - \zeta_0(t)) \end{cases} \tag{12.16}$$

Esempio 12.2 *Sia S il sistema dell'esempio . Si ha $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ e*

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = \cos\omega t, \quad \beta_1(t) = \sin\omega t, \quad \gamma_1(t) = 0 \\ \alpha_2(t) = -\sin\omega t, \quad \beta_2(t) = \cos\omega t, \quad \gamma_2(t) = 0 \\ \alpha_3(t) = 0, \quad \beta_3(t) = 0, \quad \gamma_3(t) = 1 \end{cases} \tag{12.17}$$

con ω costante.

12.4 Sistemi mobili vincolati

Consideriamo ora n punti $(P_1, \dots, P_n)$ di coordinate (ξ_i, η_i, ζ_i) rispetto al sistema fisso Σ e (x_i, y_i, z_i) rispetto al sistema mobile S, $i = 1, \dots, n$. In termini di vettori raprresentativi, si pone

$$\mathcal{X} = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n)_\Sigma = (\xi_1\mathbf{e}_1 + \eta_1\mathbf{e}_2 + \zeta_1\mathbf{e}_3, \quad \dots \quad , \xi_n\mathbf{e}_1 + \eta_n\mathbf{e}_2 + \zeta_n\mathbf{e}_3) \in \mathcal{R}^{3n}$$

vettore rappresentativo in Σ e

$$\mathbf{X} = (x_1, y_1, z_1, \quad \dots \quad , x_n, y_n, z_n)_S = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, \dots, x_n\mathbf{i} + y_n\mathbf{j} + z_n\mathbf{k}) \in \mathcal{R}^{3n}$$

vettore rappresentativo in S. Le relazioni fra i due vettori rappresentativi sono stabilite dalle relazioni (11.10), (12.15) (o (12.16)).
Estendendo le (12.5)–(12.7) a n punti, si hanno i vettori rappresentativi della velocità, velocità relativa e velocità di trascinamento:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}(P_1), \dots, \mathbf{v}(P_n)) = \left(\frac{d\mathcal{X}}{dt}\right)_\Sigma, \tag{12.18}$$

$$\mathbf{V}_R = (\mathbf{v}_R(P_1), \dots, \mathbf{v}_R(P_n)) = \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right)_S \tag{12.19}$$

$$\mathbf{V}_T = (\mathbf{v}_T(P_1), \dots, \mathbf{v}_T(P_n)) = \left(\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial t}\right)_\Sigma. \tag{12.20}$$

I punti sono soggetti a m vincoli indipendenti, che supponiamo siano lisci e del tipo

$$f_k(x_1, \dots, z_n) = 0, \quad k = 1, \dots, m \tag{12.21}$$

L'ipotesi fatta mediante la (12.21) è che i vincoli si possano scrivere nel sistema S in modo *indipendente dal tempo.* In termini geometrici, questo corrisponde a supporre di vincolare i punti a varietà che partecipano in modo solidale al moto rigido di S. Esempi possono essere i vincoli "appartenere all'asse z" (cioè $x = y = 0$), oppure "avere distanza fissa dall'asse y" (cioè $x^2 + z^2 - c^2 = 0$). Ovviamente, la scrittura dei medesimi vincoli rispetto al sistema fisso Σ (mediante le (12.16)) vede la presenza esplicita del tempo, se S è in movimento: i vincoli in Σ si scrivono infatti

$$f_k(x_1(\xi_1,\dots,\zeta_n,t),\quad \dots \quad ,z_n(\xi_1,\dots,\zeta_n,t)) = \tilde{f}_k(\xi_1,\dots,\zeta_n,t) = 0, \quad k = 1,\dots,m.$$

Introduciamo ora le coordinate lagrangiane $(q_1,\dots,q_l)$, con $l = 3n - m$. Per l'ipotesi fatta, possiamo sicuramente scegliere tali coordinate in modo che il vettore rappresentativo nel sistema S $\mathbf{X}$ sia esprimibile come $\mathbf{X} = \mathbf{X}(q_1,\dots,q_l)$, cioè senza far comparire il tempo esplicitamente.
Ricordiamo la scomposizione del vettore rappresentativo delle velocità in $\mathcal{R}^{3n}$ secondo la componente nello spazio tangente e la componente di trascinamento dei vincoli:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{X}(q_1(t),\dots,q_l(t),t) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} \tag{12.22}$$

Non è difficile rendersi conto che nelle ipotesi fatte il primo vettore di (12.22) corrisponde al vettore velocità relativa (12.19):

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i}\dot{q}_i = \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right)_S \tag{12.23}$$

mentre il secondo vettore legato al moto dei vincoli è la *velocità di trascinamento* (12.20):

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} = (\mathbf{V}_T \tag{12.24}$$

dove la presenza esplicita di t in $\mathcal{X}$ è nell'origine O e nei versori del sistema in moto S.

Esempio 12.3 *Consideriamo ancora il sistema S dell'esempio e due punti P_1, vincolato sul piano $y = 0$, e P_2, vincolato sul medesimo piano e a distanza fissa da P_1. Le equazioni vincolari sono:*

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - d_2 = 0 \end{cases}$$

I gradi di libertà sono $2 \cdot 3 - 3 = 3$ (verificare l'indipendenza dei vincoli). Come coordinate lagrangiane, scegliamo $q_1 = x_1$, $q_2 = z_1$, $q_3 = \varphi$, dove φ è l'angolo sul piano $y = 0$ che il vettore $P_2 - P_1$ forma con la direzione verticale.
I vettori rappresentativi del sistema sono dunque:

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}(q_1,q_2,q_3,t) = (q_1\cos\omega t, q_1\sin\omega t, q_2, (q_1 + d\cos q_3)\cos\omega t, (q_1 + \cos q_3)\sin\omega t, q_2 + d\cos q_3)_\Sigma, \\ &\mathbf{X}(q_1,q_2,q_3) = (q_1, 0, q_2, q_1 + d\cos q_3, 0, q_2 + d\cos q_3)_S. \end{aligned}$$

Si hanno dunque due modi per scrivere il vettore velocità del punto:

(1) *si calcola* $\dfrac{d}{dt}\mathcal{X}(q_1(t),\dots,q_l(t),t)$,

(2) *si scrivono le (12.19) e (12.20).*

Verificare per esercizio che si ottiene lo stesso vettore e controllare in particolare le uguaglianze (12.23) e (12.24).

12.5 Equazioni di Lagrange del moto

A questo punto si prefigurano due possibilità per studiare il moto del sistema:

1. si scrivono le equazioni di moto nel sistema fisso Σ (*moto assoluto*),
2. si studia *il moto relativo* al sistema S, aggiungendo dunque alle forze direttamente applicate quelle di trascinamento e di Coriolis.

12.6 Moto assoluto

Pensando alla scomposizione (12.2), l'energia cinetica si scrive come:

$$(12.25)\quad T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}^2(P_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_R^2(P_i) + \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_R(P_i)\cdot(\underline{\omega}\times(P_i - O)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\underline{\omega}\times(P_i - O))^2\,.$$

D'altra parte, sappiamo che in termini di coordinate lagrangiane, a partire dal vettore rappresentativo $\mathcal{X}$ troviamo $T = T_2 + T_1 + T_0$, dove 0, 1, 2 indica il grado del polinomio rispetto alle variabili $\dot{q}_k$, $k = 1, \ldots, l$.

Esercizio 12.1 *Verificare che i tre termini nella (12.25) corrispondono rispettivamente a T_2, T_1 e T_0.*

Se le forze applicate sono conservative, si scrive

$$(12.26)\qquad \mathcal{L} = T + \tilde{U}$$

e si procede nella scrittura delle equazioni di moto come di consueto.

12.7 Moto relativo

L'*energia cinetica relativa*, cioè costruita a partire dalle velocità relative al sistema S, è

$$(12.27)\qquad T_R = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_R^2(P_i) = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k}\dot{q}_h\dot{q}_k = T_2$$

dove $\mathbf{x}_i$ sono le coordinate di P_i rispetto a S, cioè $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$.
Occupiamoci ora della scrittura delle equazioni di moto. Oltre alle forze direttamente applicate, che supponiamo conservative, devono essere esaminati i contributi della forza di trascinamento e di Coriolis (vedi (12.12)).
Siano $\mathbf{F}_T = (\mathbf{F}_T(P_1), \ldots, \mathbf{F}_T(P_n))$ e $\mathbf{F}_C = (\mathbf{F}_C(P_1), \ldots, \mathbf{F}_C(P_n))$ i vettori in $\mathcal{R}^{3n}$ che elencano le forze di trascinamento e di Coriolis per gli n punti. Calcoliamo le proiezioni sullo spazio tangente di $\mathbf{F}_T$ e $\mathbf{F}_C$. Abbiamo:

$$\mathbf{F}_C\cdot\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_k} = -2\sum_{i=1}^{n} m_i\underline{\omega}\times\mathbf{v}_R(P_i)\cdot\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} = -2\sum_{i=1}^{n} 2m_i\underline{\omega}\times\left(\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\cdot\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} = 0$$

Dunque, le forze di Coriolis non contribuiscono al moto. In altri termini, si dice che la forza di Coriolis non compie lavoro virtuale.
Esaminiamo ora il contributo di $\mathbf{F}_T$. Ci mettiamo in ipotesi più restrittive, assumendo che:

(i) le origini dei due sistemi concidono:

$$(12.28)\qquad O \equiv \Omega,$$

(ii) il vettore $\underline{\omega}$ è costante; senza perdere in generalità, possiamo supporre che $\underline{\omega}$ sia diretto come $\mathbf{k}$:

$$(12.29)\qquad \underline{\omega} = \omega\mathbf{k},$$

con ω numero reale costante.

Consideriamo dapprima, per semplicità, il caso $n = 1$ (un solo punto P). La forza di trascinamento per il punto P di massa m è

$$\mathbf{F}_T(P) = -m\mathbf{a}_T(P) = m\omega^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

Si vede subito che il campo è conservativo di potenziale

$$(12.30)\qquad U_T(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

Per il sistema di n punti $P_1, \ldots, P_n$ si trova così:

$$\mathbf{F}_T(P_1, \ldots, P_n) = (\mathbf{F}_T(P_1), \ldots, \mathbf{F}_T(P_n)) = \nabla_{\mathbf{X}} U_T(\mathbf{X})$$

con $\nabla_{\mathbf{X}}$ gradiente in $\mathcal{R}^{3n}$ e

$$U_T(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum m_i \omega^2 (x_i^2 + y_i^2). \tag{12.31}$$

A questo potenziale corrisponde il potenziale $\tilde{U}_T(q_1, \ldots, q_l) = U_T(\mathbf{X}(q_1, \ldots, q_l))$ scritto nelle coordinate lagrangiane. Come sappiamo, le proiezioni della forza $\mathbf{F}_T$ nello spazio tangente sono:

$$\mathbf{F}_T \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_k} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial q_k}, \quad k = 1, \ldots, l.$$

Pertanto, possiamo scrivre la *Lagrangiana relativa* al sistema S nel seguente modo:

$$\mathcal{L}_R = T_R + \tilde{U} + \tilde{U}_T \tag{12.32}$$

e le equazioni di moto corrispondenti sono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots l. \tag{12.33}$$

E' importante osservare che

Proprietà 12.1 *Nelle ipotesi (12.28), (12.29) si ha*

$$T_0(q_1, \ldots, q_l) \equiv \tilde{U}_T(q_1, \ldots, q_l) \tag{12.34}$$

, cioè il potenziale delle forze di trascinamento coincide con il termine T_0 dell'energia cinetica privo di variabili cinetiche $\dot{q}_k$, $k = 1, dots, l$.

Per dimostrare la proprietà, basta ricordare che

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}$$

con $\mathbf{x}_i$ cordinate di P_i in S. In base alle ipotesi (12.28), (12.29), si ha:

$$\mathbf{v}_T(P_i) = \omega^2(-y_i \mathbf{i} + x_i \mathbf{j}).$$

Ricordando (12.7), si trova così:

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_T(P_i) \cdot \mathbf{v}_T(P_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \omega^2 (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^{n} U_T(x_i, y_i, z_i)$$

che coincide con (12.31). Per ottenere (12.34), basta esprimere le funzioni mediante le variabili lagrangiane $(q_i, \ldots, q_l)$. $\square$
Possiamo a questo punto confrontare le due Lagrangiane (12.26) e (12.32). Si ha:

$$\mathcal{L} = T + \tilde{U} = T_2 + T_1 + T_0 + \tilde{U} \qquad \mathcal{L}_R = T_R + \tilde{U} + \tilde{U}_T \tag{12.35}$$

Dato che $T_R = T_2$ e $\tilde{U}_T = T_0$, troviamo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + T_1 \tag{12.36}$$

Se il termine T_1 non è nullo, le due lagrangiane (pur espresse nelle medesime variabili $(q_1, \ldots, q_l)$ sono diverse. Ci chiediamo dunque se danno luogo alle medesime equazioni di moto. Per questo tipo di verifica, confrontiamo le equazioni di moto, osservando che:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_1}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots l. \tag{12.37}$$

Ricordando che $T_1 = \sum\limits_{k=1}^{l} b_k(q_1, \ldots, q_l)\dot{q}_k$, si trova:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_1}{\partial q_i}, \quad k = 1, \ldots l = \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{\partial b_i}{\partial q_k} - \frac{\partial b_k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k. \tag{12.38}$$

Se il sistema ha un solo grado di libertà ($l = 1$), il contributo (12.38) è nullo e i due sistemi di equazioni di moto ('reflagr2rel) e (12.37) coincidono. Per $l > 1$, non è difficile verificare che i due sistemi (corrispondenti ad annullare i due membri dell'uguaglianza in (12.37)) hanno le stesse soluzioni.

Esercizio 12.2 *Considerare un punto materiale di massa m vincolato all'ellissoide di equazione*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{\partial b^2} = 1$$

scritto rispetto ad un sistema S che ruota uniformemente come in (12.28), (12.29). Sul punto agisce la forza peso. Introdurre due parametri lagrangiani q_1 e q_2 nel modo in cui si è fatto per l'ellissoide di rotazione. Scrivere $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}_R$, verificando le uguaglianze $T_R = T_2$, $\tilde{U}_T = T_0$. Scrivere le equazioni di moto assoluto e relativo. Verificare che T_1 non è nullo e stabilire l'equivalenza dei due sistemi.

12.8 Posizioni di equilibrio

Il problema statico consiste nella ricerca dell'equilibrio *assoluto*, cioè le posizioni di equilibrio rispetto al sistema fisso Σ, o dell'equilibrio *relativo*, cioè rispetto al sistema S. Ad esempio, un punto fermo su una piattaforma ruotante è di equilibrio relativo rispetto al sistema solidale alla piattaforma, ma non di equilibrio assoluto, in quanto si muove rispetto ad un sistema che registra il moto del supporto.
Le posizioni di equilibrio assoluto si trovano cercando le soluzioni di

$$\partial \tilde{U} \partial q_k = 0, \quad k = 1, \ldots, l, \tag{12.39}$$

tenendo presente che la configurazione di equilibrio deve appartenere al sistema Σ per ogni istante t. Se ad esempio un punto è vincolato su una retta ruotante intorno all'origine del sistema, l'unica configurazione possibile di equilibrio è l'origine.
Le posizioni di *equilibrio relativo* corrispondono alle soluzioni di

$$\partial \tilde{U} \partial q_k + \partial \tilde{U}_T \partial q_k = 0, \quad k = 1, \ldots, l, \tag{12.40}$$

La stabilità delle posizioni è definita nel medesimo modo e si può ricorrere al criterio di Dirichlet. Si può ugualmente parlare di piccole oscillazioni attorno alle posizioni di equilibrio relativo.

Esempio 12.4 *Consideriamo i medesimi sistemi Σ e S nelle ipotesi (12.28) e (12.29) e un punto P di massa m vincolato sul piano $y = 0$ e sulla parabola $z = az^2$. Si ha $l = 3 - 2 = 1$ e come parametro lagrangiano si sceglie l'ascissa del punto. Sul punto agisce la forza peso e la forza $\mathbf{F} = -k^2\mathbf{i}$.*
Si ha $\mathbf{X}(q) = (x(q), y(q), z(q))_S = (q, o, aq^2)$, $\mathcal{X}(q,t) = (\xi(q,t), \eta(q,t), \zeta(q,t))_\Sigma = (q\cos\omega t, q\sin\omega t, aq^2)_\Sigma$.
Inoltre $\tilde{U} = -mgaq^2 - k^2 q$, $\tilde{U}_T = \dfrac{1}{2}m\omega^2 q^2$. L'equazione (12.39) ammette come soluzione $q = -\dfrac{k^2}{2mga}$, che però non può dare luogo ad una posizione di equilibrio assoluto, in quanto l'unica configurazione ferma rispetto a Σ è l'origine degli assi, che corrisponde a $q = 0$.
L'equazione (12.40) ha come soluzione $q = \dfrac{k^2}{m\omega^2 - 2mga}$. Si studi per esercizio la stabilità della posizione di equilibrio trovata e si discuta il caso $\omega^2 = 2mga$.

.