

11 Piccole oscillazioni attorno a posizioni stabili

Consideriamo un sistema con l gradi di libertà descrivibile mediante le coordinate lagrangiane (q_1, \dots, q_l) . Supponiamo che i vincoli siano lisci e fissi e che le forze direttamente applicate siano conservative. La Lagrangiana del sistema è dunque del tipo (vedi (8.17)) $\mathcal{L} = T - V$ con (vedi (8.8))

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{h,k}(q_1, \dots, q_l) \dot{q}_h \dot{q}_k$$

e $V(\mathbf{q}) = -\tilde{U}$, energia potenziale (si è posto $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$).

Supponiamo di avere una configurazione di equilibrio stabile $\mathbf{x}_0 = (q_1^0, \dots, q_l^0, 0, \dots, 0)$ nello spazio delle fasi. L'idea dell'approccio al problema mediante le *piccole oscillazioni* consiste nello scrivere una Lagrangiana approssimata (mediante lo sviluppo di Taylor troncato ad un certo ordine) e studiare le equazioni di moto semplificate corrispondenti ad essa. La possibilità di approssimare il moto è giustificata dal fatto che la posizione di equilibrio è stabile: ci aspettiamo infatti che in un intorno (nello spazio delle fasi) sufficientemente piccolo della soluzione di equilibrio l'orbita rimanga vicino alla soluzione medesima.

11.1 Approssimazione della Lagrangiana

Ricordiamo che se $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$, f è una funzione da \mathcal{R}^n in \mathcal{R} (i. e. $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}$), lo sviluppo di Taylor fino al secondo ordine intorno al punto \mathbf{x}_0 si scrive

$$(11.1) \quad f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}$$

dove:

- $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_0)$ è il gradiente della funzione f calcolato in $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right);$$

- $H(\mathbf{x}_0)$ è la matrice Hessiana delle derivate seconde calcolata in $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

- R è il resto di ordine superiore a 2.

Prima di sviluppare in serie, operiamo il cambiamento di coordinate $\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$, in modo da avere l'origine come punto di equilibrio stabile. Notare che $\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{q}}$, per cui

$$(11.2) \quad \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^l a_{h,k}(\mathbf{Q} + \mathbf{q}_0) \dot{Q}_h \dot{Q}_k - V(\mathbf{Q} + \mathbf{q}_0).$$

Applicando (11.1) alla funzione (11.2) (ponendo $n = 2l$ e $\mathbf{x} = (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$), si trova:

$$(11.3) \quad \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{h,k=1}^l \bar{a}_{h,k} \dot{Q}_h \dot{Q}_k - \sum_{h,k=1}^l \bar{V}_{h,k} Q_h Q_k \right)$$

dove i coefficienti numerici sono

$$\bar{a}_{h,k} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{Q}_h \partial \dot{Q}_k} \Big|_{\mathbf{Q}=\mathbf{0}} = a_{h,k}(\mathbf{q}_0), \quad \bar{V}_{h,k} = \frac{\partial^2 V}{\partial Q_h \partial Q_k} \Big|_{\mathbf{Q}=\mathbf{0}}.$$

Esercizio 11.1 Verificare con tutti i passaggi la (11.3), (iniziare con il caso unidimensionale $l = 1$). Notare che il termine del primo ordine è nullo e che nel termine del secondo ordine le derivate seconde nelle \mathbf{Q} e nelle $\dot{\mathbf{Q}}$ rimangono separate.

In notazione matriciale, la (11.3) si scrive:

$$(11.4) \quad \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{Q}}^T \bar{A} \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q}^T \bar{V} \mathbf{Q} \right)$$

con \bar{A} e \bar{V} rispettivamente le matrici $(\bar{a}_{i,j})$ e $(\bar{V}_{i,j})$. Le equazioni di Lagrange approssimate del moto, cioè le equazioni che corrispondono alla lagrangiana (11.3) sono:

$$(11.5) \quad \sum_{j=1}^l \bar{a}_{i,j} \ddot{Q}_j + \sum_{j=i}^l \bar{V}_{i,j} Q_j = 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

o equivalentemente, in forma matriciale:

$$(11.6) \quad \bar{A} \ddot{\mathbf{Q}} + \bar{V} \mathbf{Q} = 0.$$

Esercizio 11.2 Verificare le (11.5) e (11.6).

11.2 Frequenze proprie e modi normali

Vogliamo studiare ora le proprietà del sistema di equazioni differenziali (11.6) in corrispondenza di una configurazione di equilibrio stabile in $(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = (0, 0)$. Sappiamo già (vedi Paragrafo 6.2) che la matrice \bar{A} è *simmetrica* e *definita positiva*. Supporremo che anche la matrice \bar{V} (di per sé simmetrica) sia *definita positiva*. Questa condizione implica la presenza di un minimo isolato per la funzione $V(\mathbf{Q})$ per $\mathbf{Q} = 0$, dunque, per il criterio di Dirichlet (teorema 8.1), di una posizione di equilibrio stabile. Osservare che la condizione è comunque sufficiente, ma non necessaria (si possono avere minimi isolati senza che la matrice Hessiana sia definita positiva). Il risultato importante consiste nella possibilità di poter disaccoppiare il sistema (11.6) come l equazioni di moto di l oscillazioni armoniche indipendenti. In altre parole, si ha il seguente

Teorema 11.1 Date \bar{A} e \bar{V} simmetriche e definite positive, si può trovare una trasformazione lineare di coordinate (per le variabili \mathbf{Q}) U , U matrice quadrata di ordine l , in modo che il sistema (11.6) si scrive per le nuove coordinate $\mathbf{X} = U\mathbf{Q}$:

$$(11.7) \quad \ddot{\mathbf{X}} + \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \mu_l \end{pmatrix} \mathbf{X} = 0$$

con $\mu_k > 0$, $k = 1, \dots, l$ ovvero, in componenti,

$$(11.8) \quad \ddot{x}_k + \mu_k x_k = 0, \quad k = 1, \dots, l$$

Le oscillazioni (11.7) o (11.8) sono dette *modi normali* del sistema e le frequenze di oscillazione $\nu_k = \frac{\sqrt{\mu_k}}{2\pi}$ sono dette *frequenze proprie*.

La dimostrazione del teorema si basa sul seguente risultato, diretta conseguenza del *teorema spettrale reale*:

Proprietà 11.1 Data una matrice reale e simmetrica S , esiste una matrice ortogonale W (cioè $W^T W = I$) tale che $W^T S W = D$, con D matrice diagonale.

Dimostriamo ora il teorema 10.1, per mezzo dei seguenti passi successivi.

I. In base alla proprietà 10.1, essendo la matrice \bar{A} simmetrica e definita positiva, esiste una matrice ortogonale W ($W^T W = I$) tale che $W^T \bar{A} W = D$, con D matrice diagonale: $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, con $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, l$. Quest'ultima proprietà deriva dal fatto che gli α_i sono gli autovalori della matrice \bar{A} (verificare) e che \bar{A} è definita positiva. Per la positività degli α_i , possiamo trovare facilmente W_1 ortogonale tale che

$$(11.9) \quad W_1^T \bar{A} W_1 = I$$

con I matrice unitaria di ordine l .

E' immediato verificare che $W_1 = D_1 W$, con $D_1 = \text{diag}(1/\sqrt{\alpha_1}, \dots, 1/\sqrt{\alpha_l})$.

II. Si opera un primo cambiamento di variabili ponendo $\mathbf{Q}_1 = W_1^T \bar{A} \mathbf{Q}$, in modo che il sistema di equazioni (11.6) diventa

$$\ddot{\mathbf{Q}}_1 + W_1^T \bar{V} W_1 \mathbf{Q}_1 = 0.$$

III. La matrice $C = W_1^T \bar{V} W_1$ è simmetrica e definita positiva (verificare per esercizio): in base alla Proprietà 10.1, si può trovare una matrice ortogonale W_2 tale che $W_2^T C W_2 = D_2$, con $D_2 = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_l)$, $\mu_i > 0$ per $i = 1, \dots, l$.

IV. Si attua un secondo cambiamento di coordinate ponendo $\mathbf{X} = W_2^T \mathbf{Q}_1$, in modo che il sistema si scrive $\ddot{\mathbf{X}} + \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_l) \mathbf{X} = 0$, che coincide esattamente con (11.8).

Il cambiamento complessivo di variabili è dunque

$$(11.10) \quad \mathbf{X} = U \mathbf{Q}, \quad U = W_2^T W_1^T \bar{A},$$

con W_1 matrice che trasforma \bar{A} nell'identità, W_2 matrice ortogonale che diagonalizza la matrice simmetrica $W_1^T \bar{V} W_1$.

□

Dimostriamo ora le seguenti Proprietà, che risultano utili al fine di calcolare le frequenze proprie e i modi normali, senza passare attraverso l'intero procedimento I-IV.

Proprietà 11.2 *Gli autovalori di D_2 (cioè i numeri positivi μ_i che compaiono in (11.8)) sono soluzioni del problema generalizzato agli autovalori*

$$(11.11) \quad \det(\mu \bar{A} - \bar{V}) = 0.$$

Per dimostrare la (11.11), basta osservare che

$$\det(\mu \bar{A} - \bar{V}) = \frac{1}{(\det A)^2} \det(W_1^T (\mu \bar{A} - \bar{V}) W_1) = \frac{1}{(\det A)^2} \det(\mu I - C).$$

Dunque, μ è autovalore di C (cioè è un elemento diagonale di D_2 , con D_2 tale che $W_2^T C W_2 = D_2$) se e solo se è autovalore generalizzato, cioè soddisfa (11.11). Per trovare le frequenze proprie si risolve dunque (11.11), che viene detta *equazione secolare*.

La seguente proprietà fornisce invece il legame fra la matrice U del cambiamento di riferimento (11.10) e gli autovettori generalizzati di (11.11).

Proprietà 11.3 *Gli autovettori generalizzati \mathbf{u}_k , $k = 1, \dots, l$, cioè i vettori che verificano*

$$(11.12) \quad (\mu_k \bar{A} - \bar{V}) \mathbf{u}_k = 0$$

formano una matrice $\tilde{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l)$ (presi come vettori colonna) che verifica:

$$(11.13) \quad \tilde{U} = U^{-1} = (W_2^T W_1^T \bar{A})^{-1}$$

$$(11.14) \quad \tilde{U}^T \bar{A} \tilde{U} = I$$

La condizione (11.14), detta di *ortonormalizzazione*, equivale a

$$(11.15) \quad \mathbf{u}_k^T \bar{\mathbf{A}} \mathbf{u}_h = \delta_{k,h}$$

con $\delta_{k,h}$ simboli di Kronecher: $\delta_{k,h} = 1$ se $h = k$, 0 altrimenti. La dimostrazione della proprietà 10.3 si basa sull'osservare che

$$(\mu_k \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{V}}) \mathbf{u}_k = (W_1^T)^{-1} (\mu_k W_1^T \bar{\mathbf{A}} W_1 - W_1^T \bar{\mathbf{V}} W_1) W_1^{-1} \mathbf{u}_k = (W_1^T)^{-1} (\mu_k I - C) W_1^{-1} \mathbf{u}_k.$$

Pertanto, \mathbf{u}_k è autovettore generalizzato di $\mu_k \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{V}}$ se e solo se $W_1^{-1} \mathbf{u}_k$ è autovettore della matrice $C = W_1^T \bar{\mathbf{V}} W_1$. D'altra parte, abbiamo già trovato (punto III) che gli autovettori di C sono i vettori colonna della matrice W_2 . Dunque, vale $W_1^{-1} \mathbf{u}_k = \mathbf{w}_k$, dove \mathbf{w}_k è la k -esima colonna di W_2 . In forma di matrici, possiamo scrivere $W_1^{-1} \tilde{U} = W_2$. Dato che $W_1^{-1} = W_1^T \mathbf{A}$, si trova infine la (11.13). La (11.14) (la cui verifica è lasciata per esercizio) specifica la lunghezza degli autovettori, che in generale sono determinati, come sappiamo, a meno di un coefficiente di proporzionalità.

□

La proprietà appena vista consente di trovare la matrice del cambiamento di riferimento, calcolando semplicemente gli autovettori generalizzati e invertendo la matrice ottenuta. Notare fra l'altro che $U = \tilde{U}^{-1} = \tilde{U} \bar{\mathbf{A}}$, per cui non è necessario calcolare l'inversa della matrice.

Ovviamente, un autovalore μ_k può avere molteplicità maggiore di 1 (cioè è radice non semplice di (11.11)). In questo caso, gli autospazi corrispondenti all'autovalore hanno dimensione maggiore di 1.

Esercizio 11.3 Si ripercorra la costruzione del sistema approssimato nel caso banale $l = 1$ e trovare la frequenza delle piccole oscillazioni.

Esercizio 11.4 Un punto materiale P di massa m è vincolato sulla curva γ di equazioni $x = R \sin \varphi$, $y = \lambda \varphi$, $z = R \cos \varphi$, $\lambda > 0$, (con z asse verticale ascendente) e sia

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -k(P - O) + mg \mathbf{e}_3$$

il campo di forze a cui il punto è soggetto. Posto $\alpha = Rgm/k\lambda^2$, adimensionale, si determini la condizione su α affinché l'unica posizione di equilibrio (stabile) si abbia per $\varphi = 0$. Si trovi la frequenza delle piccole oscillazioni.

Esercizio 11.5 Siano dati due punti P e Q con stessa massa m vincolati su una circonferenza posta in un piano verticale di raggio R . Essi sono sottoposti alla forza peso e ad una forza elastica di richiamo l'uno con l'altro di costante k . Inoltre, P è attratto da una forza elastica (costante elastica k) di richiamo verso il punto P' , proiezione di P sull'asse orizzontale passante per il centro della circonferenza. Scegliere come coordinate lagrangiane gli angoli che i raggi vettori formano con l'asse orizzontale.

- (i) Verificare che la posizione in cui i due punti sono sovrapposti sull'asse orizzontale è di equilibrio stabile.
- (ii) Scrivere la Lagrangiana approssimata e trovare la frequenza delle piccole oscillazioni.
- (iii) Trovare i modi normali, cioè il cambiamento di riferimento per scrivere il sistema in modo disaccoppiato.

Esercizio 11.6 Considerare due punti P_1 e P_2 con stessa massa m vincolati su un piano verticale. Inoltre, P_1 ha distanza R da un punto fisso O del piano, mentre P_2 ha distanza R da P_1 . Oltre alla forza peso per entrambi i punti, su P_2 agisce una forza elastica di richiamo verso O di costante k .

- (i) Verificare che la posizione in cui i due punti sono allineati sull'asse verticale passante per O , con P_1 più in basso di O e P_2 più in basso di P_1 , è di equilibrio stabile se $mg \geq \frac{3}{2}kR$.
- (ii) Scrivere la Lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno a questa configurazione.
- (iii) Determinare le frequenze delle piccole oscillazioni nel caso $mg = 3kR$.

(iv) Determinare i modi normali, nel medesimo caso.

Esercizio 11.7 Due punti P_1 e P_2 entrambi di massa m sono posti alle estremità di due aste di lunghezza l e massa trascurabile. Gli altri estremi delle aste sono fissati su una retta orizzontale e posti a distanza d . I punti P_1 e P_2 sono collegati da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo pari a d . Scegliere come coordinate lagrangiane gli angoli ϑ e φ che le aste formano con la direzione verticale.

- (i) Descrivere gli spostamenti virtuali del sistema.
- (ii) Individuare una configurazione di equilibrio stabile e calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni.
- (iii) Scrivere le equazioni del sistema lineare delle piccole oscillazioni e individuare la trasformazione lineare che disaccoppia il sistema nei modi normali.
- (iv) Interpretare qualitativamente i moti del sistema disaccoppiato (valutare la presenza o meno di k nelle frequenze proprie).
- (v) Scrivere la lagrangiana del sistema.