10 Equilibrio dei sistemi olonomi

Una configurazione corrispondente alle coordinate lagrangiane $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_l^0)$ è di *equilibrio* se è soluzione costante delle equazioni (8.10). Dalle medesime equazioni (o dalle (8.10)), si ricavano le condizioni di equilibrio:

$$(\mathbf{F} + \mathbf{\Phi}) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, l, \tag{10.1}$$

secondo le quali deve essere nulla la proiezione delle forze sullo spazio tangente. Nel caso di vincoli lisci si ha ovviamente

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, l, \tag{10.2}$$

e, se le forze sono conservative, mediante la (8.15) si vede che le condizioni (10.2) corrispondono a

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, l, \tag{10.3}$$

in base alle quali il potenziale $\tilde{U}$ è *stazionario* rispetto alle variabili lagrangiane $(q_1, \dots, q_l)$ nelle posizioni di equilibrio.

10.1 Stabilità delle posizioni di equilibrio

Una posizione di equilibrio, come soluzione costante delle (8.14), è associata alle condizioni iniziali (per le funzioni q_k e le loro derivate, essendo il sistema del secondo ordine)

$$(q_1(0), \dots, q_l(0)) = (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_l) \quad (\dot{q}_1(0), \dots, \dot{q}_l(0)) = (0, \dots, 0). \tag{10.4}$$

Il concetto intuitivo di stabilità consiste nel supporre che una posizione di equilibrio sia *stabile* se una soluzione del sistema rimane vicino alla soluzione costante di equilibrio se le condizioni iniziali sono prossime alle (10.4), cioè $(q_1(0), \dots, q_l(0))$ vicino a $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_l)$ e velocità iniziale vicino a quella nulla.
Per formalizzare e approfondire questa considerazione qualitativa, definiamo la stabilità per un sistema di equazioni differenziali del primo ordine e faremo rientrare il sistema delle equazioni di Lagrange in questa classe.
Un *sistema differenziale del primo ordine* di n equazioni *autonomo* è del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \tag{10.5}$$

associato alla condizione iniziale $(x_1(0), \dots, x_n(0)) = (x_{1,0}, \dots, x_{n,0})$.
Le funzioni f_i, $i = 1, \dots, n$ vanno da $\mathcal{R}^n$ in $\mathcal{R}$. Il termine *autonomo* si riferisce al fatto che le funzioni f_i non dipendono esplicitamente dalla variabile indipendente t, ma solo attraverso le incognite x_i.
In forma vettoriale il sistema si scrive

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{10.6}$$

dove $\mathbf{x} = (x_1(t), \dots x_n(t))$, $\mathbf{x}(0) = (x_{1,0}, \dots, x_{n,0})$ e $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$. Le *posizioni di equilibrio* del sistema (10.5) sono le soluzioni dell'equazione $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ (corrispondenti alle soluzioni costanti di (10.5)).
Sia $\bar{\mathbf{x}}$ una posizione di equilibrio (ossia $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$). Diciamo che $\bar{\mathbf{x}}$ è una posizione di *equilibrio stabile secondo Lyapunov* se per ogni intorno $U \in \mathcal{R}^n$ di $\bar{\mathbf{x}}$ esiste un intorno U' del medesimo punto tale ogni soluzione di (10.5) con condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in U'$ rimane nell'intorno U, cioè $\mathbf{x}(t) \in U$ $\forall t > 0$. Equivalentemente, si dice che l'equilibrio è stabile se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che, se $|\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}| < \delta$, allora $|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}| < \varepsilon$ $\forall t > 0$.
Il senso della definizione è il seguente: se si parte da un punto sufficientemente vicino alla posizione di equilibrio, si rimane nel tempo vicini alla soluzione costante.

Osserviamo che la definizione è formulata utilizzando intorni che sono contenuti nello *spazio delle fasi* (corrispondente a $\mathcal{R}^n$): infatti, essendo il sistema (10.5) autonomo, le proiezioni (dette *orbite*) dei grafici delle soluzioni $\mathbf{x}(t)$ (che sono in $\mathcal{R}^{n+1}$) sullo spazio $\mathcal{R}^n$ (proiettando parallelamente all'asse dei tempi sul sottospazio $t = 0$) non si intersecano fra di loro.
Al fine di utilizzare la definizione appena data per il sistema delle equazioni di Lagrange (8.14) (supponiamo i vincoli lisci), bisogna far vedere che tale sistema si può scrivere nella forma (10.5). In effetti, è semplice rendersi conto che il sistema (8.14) è lineare rispetto alle $\ddot{q}_k$, $k = 1 \dots, l$, nel senso che la parte che contiene le derivate di ordine maggiore (secondo ordine) è per la $k-$esima equazione,

$$\sum_h^l a_{h,k}(q_1, \dots, q_l, t)\ddot{q}_h, \quad k = 1, \dots, l$$

dove i coefficienti $a_{h,k}$ sono esattamente quelli contenuti nella (8.8).
La matrice $(a_{h,k})$, $h, k = 1, \dots, l$ è *definita positiva*, dunque invertibile. Pertanto, risulta ora chiaro che è possibile porre il sistema (8.14) in *forma normale*:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = w_1(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t) \\ \dots \\ \ddot{q}_l = w_l(q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t) \end{cases} \tag{10.7}$$

Incidentalmente, osserviamo che la scrittura del sistema (8.14) nella forma (10.7) assicura l'esistenza e l'unicità della soluzione (compatibilmente con la regolarità delle funzioni $w_1, \dots, w_n$).
Definiamo ora $\mathbf{x} = (q_1, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l) \in \mathcal{R}^{2l}$. Si vede che il sistema (10.7) si scrive mediante $2l$ equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_{l+1} \\ \dots \\ \dot{x}_l = x_{2l} \\ \dot{x}_{l+1} = w_1(x_1, \dots, x_{2l}, t) \\ \dots \\ \dot{x}_{2l} = w_l(x_1, \dots, x_{2l}, t) \end{cases} \tag{10.8}$$

ovvero, in forma vettoriale, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, con $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^{2l}$ e $\mathbf{f} = (x_{l+1}, \dots, x_{2l}, w_1(\mathbf{x}, t), \dots, w_l(\mathbf{x}, t))$.
Se ora supponiamo i vincoli *fissi*, si ha che $\mathbf{f}$ non dipende esplicitamente del tempo, dunque troviamo il sistema (8.14) esattamente della forma (10.5), con $n = 2l$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_{l+1}, \dots, x_{2l}, w_1(\mathbf{x}), \dots, w_l(\mathbf{x}))$.
Osserviamo che il piano delle fasi per il sistema è $\mathcal{R}^{2l}$: un punto di equilibrio, come soluzione di $\mathbf{f} = 0$, ha necessariamente le $\dot{q}_k = 0$, $k = 1 \dots, l$.
La definizione di stabilità, dunque, non riguarda solamente le variabili di posizione $(q_1, \dots, q_l)$, ma anche quelle cinetiche $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$: pertanto, la partenza (per $t = 0$) vicino ad un punto di equilibrio sul piano delle fasi

$$(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_l, 0, \dots, 0)$$

riguarda non solo posizioni vicine, ma anche velocità piccole.
Per i sistemi conservativi, è molto utile la seguente proprietà per individuare la natura stabile dell'equilibrio:

Teorema 10.1 *(criterio di Dirichlet) Se in una posizione di equilibrio (cioè un punto stazionario per $\tilde{U}$) il potenziale $\tilde{U}$ ha un massimo isolato, allora l'equilibrio è stabile.*

Esercizio 10.1 *Per comprendere meglio l'argomento appena svolto, considerare il moto di un punto vincolato su una curva fissa e liscia e soggetto ad un campo di forze conservativo. Ripetere le considerazioni fatte (sistema equivalente (10.5), posizioni di equilibrio, stabilità).*

Esercizio 10.2 *Trovare le configurazioni di equilibrio per i sistemi olonomi introdotti negli esercizi precedenti e discuterne la stabilità.*