Curriculum scientifico
Alessandro Calamai

Dati personali

- Nato a Firenze il 28 luglio 1976.
- Residente a Firenze, via delle Panche 9.
- Nazionalità italiana.
- E-mail: `calamai@math.unifi.it, calamai@dipmat.univpm.it`
- URL: `http://www.dipmat.univpm.it/~calamai`

Titoli di studio

- Maturità scientifica conseguita nell'anno scolastico 1994/95 presso il Liceo Scientifico statale "A. M. Enriques Agnoletti" di Sesto Fiorentino (Firenze). Voto finale: 58/60.
- Laurea in Matematica conseguita il giorno 28 settembre 2001 presso l'Università degli Studi di Firenze. Voto finale: 110/110 e lode. Titolo della tesi:
  "Metodi topologici nei problemi ai limiti per equazioni differenziali ordinarie".
  Relatore: Prof. Massimo Furi.
  Correlatrice: Prof.ssa Rosa Maria Bianchini.
  Titolo della tesina: *"Oscillazioni isocrone nel campo della gravità".*
  Relatore della tesina: Prof. Antonio Fasano.
- Dottorato di Ricerca in Matematica conseguito il giorno 12 aprile 2005 presso l'Università degli Studi di Firenze. Titolo della tesi:
  "A degree theory for a class of noncompact perturbations of Fredholm maps".
  Direttore della ricerca: Prof. Massimo Furi.

Borse di studio

- Nel periodo 1 gennaio 2002 – 31 dicembre 2004 ho usufruito della borsa di Dottorato di Ricerca in Matematica (XVII ciclo) presso l'Università degli Studi di Firenze.
- Nei periodi 1 ottobre 2005 – 30 settembre 2007 e 1 novembre 2007 – 31 ottobre 2010 ho usufruito di un Assegno di Ricerca dal titolo:
  "Metodi topologici e variazionali in analisi non lineare", presso l'Università Politecnica delle Marche, Ancona. Responsabile della Ricerca: Prof. Piero Montecchiari.

Posizione attuale

- Assegnista di Ricerca presso il Dipartimento di Scienze Matematiche dell'Università Politecnica delle Marche, Ancona.

Partecipazione a scuole e convegni

- Incontro internazionale AMS – UMI. Pisa, 12–16 giugno 2002.
- XVII Congresso Nazionale dell'Unione Matematica Italiana. Milano, 8–12 settembre 2003.
- Scuola *"Metodi Topologici nel Calcolo delle Variazioni e Sistemi Dinamici"*. Brescia, 15–20 settembre 2003.
- Scuola *"IV Turin Fortnight on Nonlinear Analysis"*. Torino, 30 settembre – 3 ottobre 2003.
- *"Conference on Fixed Point Theory and its Applications in honour of Prof. Andrzej Granas"*. Montreal, Canada, 16–20 agosto 2004.
- *"Dynamic Days: An international workshop on Dynamical Systems and Boundary Value Problems"*. Ancona, 2–4 settembre 2004.
- *"EQUADIFF 11 – International Conference on Differential Equations"*. Bratislava, Slovacchia, 25–29 luglio 2005.
- *"Dugundji Memorial Conference on Fixed Point Theory and its Applications"*. Bedlewo, Polonia, 1–5 agosto 2005.
- *"Trends in Differential Equations and Dynamical Systems"*. Reggio Emilia, 29–30 settembre 2005.
- *"School in Nonlinear Analysis and Calculus of Variations"*. Pisa, 17–22 ottobre 2005.
- *"Mini-workshop on Dynamical Systems and Nonautonomous Differential Equations"*. Firenze, 16–17 marzo 2006.
- *"School on centers and chaos in finite dimensional dynamical systems"*. Trento, 26–30 giugno 2006.
- *"Workshop ODE ART: Ordinary Differential Equations, their Applications and Related Topics"*. Levico Terme (Trento), 4–6 ottobre 2006.
- *"International Conference on Topological Methods, Differential Equations and Dynamical Systems dedicated to the 65th birthday of Prof. Massimo Furi"*. Firenze, 13–16 giugno 2007.
- *"Joint International Meeting UMI-DMV"*. Perugia, 18–22 giugno 2007.
- Convegno *"EQUADIFF 07"*. Vienna, 5–11 agosto 2007.

- *“XVIII Congresso Unione Matematica Italiana”.* Bari, 24–29 settembre 2007.
- *“International Workshop on Trends in Differential Equations and Dynamical Systems”.* Modena, 29–30 novembre 2007.
- *“Mini-workshop on Bifurcation for Nonautonomous Dynamical Systems”.* Firenze, 3 aprile 2008.
- *“AIMS Conference on Dynamical Systems and Differential Equations”.* Arlington, Texas (USA), 18–21 maggio 2008.
- Convegno *“Functional Analysis: Methods and Applications (FAMA’08)”.* Amantea (Cosenza), 4–7 giugno 2008.
- *“Conference on Boundary Value Problems – Mathematical models in Engineering, Biology and Medicine”.* Santiago de Compostela, Spagna, 16–19 settembre 2008.
- Scuola *“New connections between dynamical systems and Hamiltonian PDEs”.* Napoli, 25–29 maggio 2009.
- *“No2DyS: A Workshop on Nonlinear Nonautonomous Dynamical Systems”.* Ancona, 6–7 luglio 2009.
- *“EQUADIFF 12 – Conference on Differential Equations and their Applications”.* Brno, Rep. Ceca, 20–24 luglio 2009.
- Convegno *“Variational, Topological and Set-valued Methods for Nonlinear Differential Problems”.* Messina, 14–16 aprile 2010.
- *“AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications”.* Dresda, Germania, 25–28 maggio 2010.
- Convegno *“Emerging Problems in Nonlinear Analysis and Differential Equations: Advances in Theory and Applications”.* Glasgow, GB, 1–4 giugno 2010.

Attività didattica

- A.A. 2003/04: esercitazioni di Metodi Matematici. Facoltà di Ingegneria, Università di Firenze (Prof. Giuseppe Modica).
- A.A. 2004/05: esercitazioni di Analisi Matematica II. Facoltà di Ingegneria, Università di Firenze (Dott. Laura Poggiolini).
- A.A. 2004/05: esercitazioni di Sistemi Dinamici. Corso di Laurea in Matematica, Università di Firenze (Prof. Riccardo Ricci).
- A.A. 2005/06: **precorso di Matematica** (6–15 settembre 2005, 24 ore). Facoltà di Ingegneria, Università di Firenze (sede di Prato).
- A.A. 2005/06 e 2006/07: esercitazioni di Matematica. Corso di Laurea in Scienze Biologiche, Università Politecnica delle Marche, Ancona (Prof. Piero Montecchiari).

- A.A. 2006/07: esercitazioni di Analisi Matematica I. Facoltà di Ingegneria, Università Politecnica delle Marche, Ancona (Prof. Cristina Marcelli).

- A.A. 2006/07 e 2007/08: esercitazioni di Analisi Matematica II. Facoltà di Ingegneria, Università Politecnica delle Marche, Ancona (Prof. Francesca Papalini).

- A.A. 2007/08: **docente incaricato del corso di Analisi III**.
  Corso di 48 ore, 6 CFU.
  Argomenti: successioni e serie di funzioni, serie di potenze, funzioni olomorfe, residui.
  Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile, Facoltà di Ingegneria, Università Politecnica delle Marche, Ancona.

- A.A. 2007/08: esercitazioni di Analisi Matematica II. Facoltà di Ingegneria, Università Politecnica delle Marche, Ancona (Prof. Flaviano Battelli).

- A.A. 2007/08 e 2008/09: collaborazione didattica (esami) per i corsi di Analisi I, II e III. Facoltà di Ingegneria, Università Politecnica delle Marche, Ancona. Docenti: Prof. Cristina Marcelli e Francesca Papalini.

- A.A. 2008/09: **docente incaricato del corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria.** Corso di 48 ore, 6 CFU.
  Argomenti: funzioni di una variabile complessa, funzioni olomorfe, residui, trasformate di Fourier e di Laplace.
  Corsi di Laurea: Ing. Biomedica (Laurea Specialistica), Ing. Informatica, Ing. Meccanica, Ing. delle Telecomunicazioni. Università Politecnica delle Marche, Ancona.

- A.A. 2008/09: esercitazioni di Modellazione Matematica. Facoltà di Ingegneria, Università Politecnica delle Marche, Ancona (Dott. Francesca Alessio).

- A.A. 2008/09: collaborazione didattica (due seminari di 2 ore) per il **corso di dottorato** *"Alcuni argomenti di Analisi globale: l'indice di punto fisso di Leray e l'operatore di traslazione di Poincaré".*
  Dottorato di Ricerca in Matematica, Università di Firenze (Dott. Marco Spadini).

- A.A. 2009/10: **docente incaricato del corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria.** Corso di 48 ore, 6 CFU.
  Argomenti: funzioni di una variabile complessa, funzioni olomorfe, residui, trasformate di Fourier e di Laplace.
  Corsi di Laurea: Ing. Biomedica (Laurea Magistrale), Ing. Informatica, Ing. Meccanica, Ing. delle Telecomunicazioni. Università Politecnica delle Marche, Ancona.

- A.A. 2009/10: collaborazione didattica (esami) per i corsi di Analisi I, Facoltà di Ingegneria, Università Politecnica delle Marche, Ancona. Docente: Prof. Francesca Papalini.

Soggiorni su invito in università straniere

- Marzo – aprile 2004: visita alla Masaryk University di Brno, Repubblica Ceca. Invito della Prof. Zuzana Dosla.
- Aprile 2008: visita alla Masaryk University di Brno, Repubblica Ceca. Invito della Prof. Zuzana Dosla.
- Febbraio 2009: visita all'Università di Würzburg, Germania. Invito del Prof. Jürgen Appell.

Seminari su invito

- *"On existence and uniqueness of solutions for ordinary differential equations with nonlinear boundary conditions"*, alla Masaryk University di Brno, Repubblica Ceca, 29 marzo 2004.
- *"The invariance of domain theorem for compact perturbations of nonlinear Fredholm maps of index zero"*, al convegno "Conference on fixed point theory and its applications". Montreal, Canada, 18 agosto 2004.
- *"On existence and uniqueness of solutions for ordinary differential equations with nonlinear boundary conditions"*, Ancona, 4 settembre 2004.
- *"A degree theory for a class of perturbed Fredholm maps"*, Firenze, 16 marzo 2006.
- *"Global branches of periodic solutions for forced delay differential equations on compact manifolds"*, Levico Terme (Trento), 4 ottobre 2006.
- *"Delay differential equations on manifolds and applications to motion problems for forced constrained systems"*, Firenze, 14 giugno 2007.
- *"Delay differential equations on manifolds and applications to motion problems for forced constrained systems"*, al convegno UMI-DMV. Perugia, 20 giugno 2007.
- *"Delay differential equations on manifolds and applications to motion problems for forced constrained systems"*, al convegno "EQUADIFF 07". Vienna, 8 agosto 2007.
- *"Risultati recenti in teoria spettrale non lineare"*, al convegno UMI.
  Bari, 24 settembre 2007.
- *"A general approach for front-propagation in functional reaction-diffusion equations"*, Modena, 29 novembre 2007.
- *"Bifurcation results for delay differential equations on manifolds and applications"*, Firenze, 3 aprile 2008.
- *"Front propagation in non-local reaction-diffusion equations"*, alla Masaryk University di Brno, Repubblica Ceca, 21 aprile 2008.
- *"Front propagation in non-local reaction-diffusion equations"*, all'Accademia delle Scienze della Repubblica Ceca. Invito del Prof. Milan Tvrdy. Praga, 25 aprile 2008.

- *"Front propagation in non-local reaction-diffusion equations"*, al convegno "AIMS Conference on Dynamical Systems and Differential Equations". Arlington, Texas (USA), 19 maggio 2008.

- *"Degree theory for a class of perturbed Fredholm maps: properties and applications"*, al convegno FAMA'08. Amantea (Cosenza), 4 giugno 2008.

- *"Front propagation in non-local reaction-diffusion equations"*, al convegno "Conference on Boundary Value Problems". Santiago de Compostela, Spagna, 18 settembre 2008.

- *"An introduction to spectral theory for nonlinear operators"*, all'Università di Würzburg, Germania, 4 febbraio 2009.

- *"Continuation results for delay differential equations on manifolds and applications"*, all'Università di Pau, Francia, 18 maggio 2009.

- *"Continuation results for retarded functional differential equations on manifolds and applications to the spherical pendulum"*. Ancona, 6 luglio 2009.

- *"Continuation results for forced oscillations of constrained motion problems with infinite delay"*, al convegno "EQUADIFF 12". Brno, Rep. Ceca, 21 luglio 2009.

- *"Continuation results for forced oscillations of constrained motion problems with infinite delay and applications to the retarded spherical pendulum"*. Messina, 14 aprile 2010.

- *"Branches of harmonic solutions for a class of periodic differential-algebraic equations"*. Dresda, Germania, 26 maggio 2010.

- *"Branches of harmonic solutions for a class of periodic differential-algebraic equations"*. Glasgow, GB, 2 giugno 2010.

Interessi di ricerca

Il mio settore di ricerca è l'Analisi Matematica. I miei argomenti di ricerca riguardano metodi topologici e variazionali in analisi non lineare.

In particolare mi occupo di teoria del grado topologico, di teoria dell'indice di punto fisso e di alcune applicazioni ai seguenti argomenti: equazioni differenziali ordinarie e problemi ai limiti su intervalli non compatti; equazioni differenziali ordinarie con ritardo; teoria della biforcazione.

Pubblicazioni scientifiche

1. A. Calamai, *On existence and uniqueness of solutions for ordinary differential equations with nonlinear boundary conditions.* Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) **7** (2004), no. 2, 469–481.

2. A. Calamai, *The invariance of domain theorem for compact perturbations of nonlinear Fredholm maps of index zero.* Nonlinear Funct. Anal. Appl. **9** (2004), no. 2, 185–194.

3. P. Benevieri, A. Calamai e M. Furi, *A degree theory for a class of perturbed Fredholm maps.* Fixed Point Theory Appl. **2005** (2005), no. 2, 185–206.

4. P. Benevieri, A. Calamai e M. Furi, *A degree theory for a class of perturbed Fredholm maps II.* Fixed Point Theory Appl. **2006** (2006), Art. ID 27154, 20 pp.

5. P. Benevieri, A. Calamai, M. Furi e M.P. Pera, *Global branches of periodic solutions for forced delay differential equations on compact manifolds.* J. Differential Equations **233** (2007), no. 2, 404–416.

6. F. Alessio, A. Calamai e P. Montecchiari, *Saddle type solutions for a class of semilinear elliptic equations.* Adv. Differential Equations **12** (2007), no. 4, 361–380.

7. P. Benevieri, A. Calamai, M. Furi e M.P. Pera, *Forced oscillations for delay motion equations on manifolds.* Electron. J. Diff. Eqns. **2007** (2007), no. 62, 1–5.

8. P. Benevieri e A. Calamai, *Bifurcation results for a class of perturbed Fredholm maps.* Fixed Point Theory Appl. **2008** (2008), Art. ID 752657, 19 pp.

9. P. Benevieri, A. Calamai, M. Furi e M.P. Pera, *On forced fast oscillations for delay differential equations on compact manifolds.* J. Differential Equations **246** (2009), no. 4, 1354–1362.

10. P. Benevieri, A. Calamai, M. Furi e M.P. Pera, *Delay differential equations on manifolds and applications to motion problems for forced constrained systems.* Z. Anal. Anwendungen **28** (2009), no. 4, 451–474.

11. P. Benevieri, A. Calamai, M. Furi e M.P. Pera, *Retarded functional differential equations on manifolds and applications to motion problems for forced constrained systems.* Adv. Nonlinear Stud. **9** (2009), no. 1, 199–214.

12. A. Calamai, M. Furi e A. Vignoli, *A new spectrum for continuous nonlinear operators in Banach spaces.* Nonlinear Funct. Anal. Appl. **14** (2009), no. 2, 317–347.

13. P. Benevieri, A. Calamai, M. Furi e M.P. Pera, *Fast forced oscillations for constrained motion problems with delay.* Commun. Appl. Anal. **13** (2009), no. 4, 497–508.

14. A. Calamai, M. Furi e A. Vignoli, *An overview on spectral theory for nonlinear operators.* Commun. Appl. Anal. **13** (2009), no. 4, 509–534.

15. A. Calamai, C. Marcelli e F. Papalini, *A general approach for front-propagation in functional reaction-diffusion equations.* J. Dynam. Differential Equations **21** (2009), no. 4, 567–593.

16. P. Benevieri e A. Calamai, *A Borsuk-type theorem for some classes of perturbed Fredholm maps.* Topol. Methods Nonlinear Anal. **35** (2010), no. 2, 379–394.

17. J. Appell, A. Calamai e A. Schmied, *Yet another spectrum for nonlinear operators in Banach spaces.* Accettato per la pubblicazione sulla rivista “Nonlinear Functional Analysis and Applications”.

18. P. Benevieri, A. Calamai, M. Furi e M.P. Pera, *A continuation result for forced oscillations of constrained motion problems with infinite delay.* Accettato per la pubblicazione sulla rivista “Advanced Nonlinear Studies”.

19. P. Benevieri, A. Calamai, M. Furi e M.P. Pera, *On the existence of forced oscillations for the spherical pendulum acted on by a retarded periodic force.* Accettato per la pubblicazione sulla rivista “Journal of Dynamics and Differential Equations”.

Preprint

20. A. Calamai, *Branches of harmonic solutions for a class of periodic differential-algebraic equations*, preprint 2009 (inviato per la pubblicazione).

21. A. Calamai, *Heteroclinic solutions of boundary value problems on the real line involving singular Φ-Laplacian operators*, preprint 2010 (inviato per la pubblicazione).

22. A. Calamai and M. Franca, *Melnikov methods and homoclinic orbits in discontinuous systems*, in preparazione.

23. A. Calamai and M. Spadini, *Branches of forced oscillations for a class of constrained ODEs: a topological approach*, in preparazione.

24. P. Benevieri, A. Calamai, M. Furi e M.P. Pera, *On general properties of retarded functional differential equations on manifolds*, in preparazione.

Tesi e altre pubblicazioni

25. A. Calamai, *Metodi topologici nei problemi ai limiti per equazioni differenziali ordinarie.* Tesi di laurea, Università di Firenze, 2001.

26. A. Calamai, *A degree theory for a class of noncompact perturbations of Fredholm maps.* Tesi di dottorato, Università di Firenze, 2005.

27. A. Calamai, *Teoria del grado topologico per una classe di perturbazioni non compatte di applicazioni di Fredholm.* Estratto della tesi di dottorato. Boll. Unione Mat. Ital. Sez. A Mat. Soc. Cult. (8) 9 (2006), suppl. (fascicolo speciale dedicato alle tesi di dottorato), 223–226.

Descrizione dettagliata dell’attività di ricerca

• In [1], lavoro tratto dalla mia tesi di laurea [25], sono stati studiati *problemi ai limiti non lineari* della forma

$$x' = f(t,x), \qquad \Phi(x) = r,$$

dove $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Si tratta di un’equazione differenziale ordinaria con condizione al bordo espressa da un operatore non lineare Φ dallo spazio $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ a valori in $\mathbb{R}^n$. In particolare è stato provato un risultato di esistenza e unicità per tali problemi nelle ipotesi in cui l’operatore Φ sia di classe C^1, generalizzando un analogo risultato di G. Vidossich (JDE, 2001).

• Nella mia tesi di dottorato [26,27] mi sono occupato del problema di costruire un *grado topologico* a valori interi per una certa classe di perturbazioni non compatte di applicazioni di Fredholm di indice zero tra spazi di Banach, chiamate applicazioni *α-Fredholm orientate*. I risultati raggiunti nella tesi sono stati quindi presentati nei lavori [2,3,4,8].

• Il lavoro [2] è dedicato a una versione del *teorema di invarianza del dominio* per una classe opportuna di perturbazioni di applicazioni non lineari di Fredholm di indice zero tra spazi di Banach.

Il classico teorema di invarianza del dominio in $\mathbb{R}^n$, dimostrato da Brouwer (1912), afferma che un'applicazione continua e localmente iniettiva manda aperti in aperti. Questo risultato può essere dimostrato con tecniche che sfruttano la teoria del grado topologico, come conseguenza del teorema dell'applicazione dispari di Borsuk. Successivamente il teorema di invarianza del dominio è stato esteso, in dimensione infinita, a perturbazioni localmente compatte dell'identità (Schauder, 1929) e a perturbazioni α-contrattive dell'identità (Nussbaum, 1972).

In un articolo di Benevieri, Furi e Pera (2000) gli autori provano il teorema di invarianza del dominio per le applicazioni non lineari (C^1) di Fredholm di indice zero tra spazi di Banach e pongono la domanda se lo stesso risultato vale anche per le perturbazioni localmente compatte di applicazioni di Fredholm.

In [2] viene data una risposta affermativa a questa domanda dimostrando che il risultato si può estendere anche a perturbazioni non compatte di applicazioni di Fredholm, purché una certa disuguaglianza che riguarda la *misura di non compattezza α* di Kuratowski sia verificata.

Per dimostrare questo risultato abbiamo introdotto due numeri, $\alpha_p(f)$ e $\omega_p(f)$, associati ad un'applicazione $f : U \to F$, definita nell' aperto U dello spazio di Banach E a valori nello spazio di Banach F, e ad un punto p dell'aperto U. Questi due numeri sono gli analoghi locali di $\alpha(f)$ e $\omega(f)$ considerati da Furi, Martelli e Vignoli in un lavoro sullo spettro non lineare (1978).

Le applicazioni considerate in [2] sono del tipo $f = g - k : U \to F$, dove f è localmente iniettiva, g è Fredholm di indice zero e vale $\alpha_p(k) < \omega_p(g)$ per ogni $p \in U$. Notiamo che questa disuguaglianza è sempre verificata nel caso in cui k sia localmente compatta. In [2] si prova che localmente, a meno di composizione con un isomorfismo lineare, tali applicazioni si possono scrivere come perturbazioni α-contrattive dell'identità. In questo modo ci si riconduce al risultato provato da Nussbaum nell'ambito della teoria del grado per le perturbazioni α-contrattive dell'identità.

• Nei lavori [3,4], in collaborazione con P. Benevieri e M. Furi (Università di Firenze), abbiamo presentato un grado topologico per applicazioni *α-Fredholm orientate*. Le applicazioni α-Fredholm sono una classe di perturbazioni non compatte di applicazioni di Fredholm di indice zero tra spazi di Banach, definite in termini dei due numeri $\alpha_p(f)$ e $\omega_p(f)$ sopra ricordati.

La teoria del grado topologico è uno strumento utile in analisi non lineare, per affrontare problemi di esistenza, unicità e molteplicità di soluzioni per equazioni che coinvolgono applicazioni tra spazi di Banach. A partire dal classico grado di Leray e Schauder (1934) per perturbazioni localmente compatte dell'identità, che rappresenta il primo passo in dimensione infinita, molti autori si sono occupati del problema di estendere la definizione di grado a una classe più ampia possibile di applicazioni in modo che le classiche proprietà fondamentali del grado (invarianza per omotopia, additività e normalizzazione, cfr. Amann e Weiss, 1973) siano verificate. Tra le altre definizioni di grado topologico ricordiamo il grado topologico per le applicazioni *quasi Fredholm orientate*, ossia perturbazioni localmente compatte di applicazioni di Fredholm, definito da Benevieri e Furi (2006), e il già citato grado per le perturbazioni α-contrattive (o, più in generale, α-addensanti) dell'identità, introdotto da Nussbaum negli anni '70.

Il grado topologico per applicazioni α-Fredholm estende sia il grado per le applicazioni quasi Fredholm orientate, sia il grado per le perturbazioni α-addensanti dell'identità. I nostri risultati sono stati raggiunti in due passi successivi: in [3] abbiamo definito il grado per la classe delle applicazioni α-Fredholm contrattive (che contiene le perturbazioni α-contrattive dell'identità) e in [4] abbiamo esteso tale definizione alla classe delle applicazioni α-Fredholm addensanti (che contiene le perturbazioni α-addensanti dell'identità). Nei nostri lavori proviamo che le proprietà fondamentali valgono per il nostro grado.

• Nel lavoro [8], in collaborazione con P. Benevieri, il grado per applicazioni α-Fredholm, definito nella mia tesi di dottorato, è stato applicato a un problema di biforcazione. Più precisamente, abbiamo fornito condizioni per l'esistenza di un punto di *cobiforcazione* o *biforcazione atipica* (nel senso di Prodi–Ambrosetti) per un'equazione semilineare con un parametro reale in uno spazio di Banach. Questo risultato di biforcazione è stato anche applicato in [8] allo studio delle soluzioni periodiche di un problema ai limiti dipendente da un parametro.

Sempre in collaborazione con P. Benevieri, in [16] abbiamo recentemente dimostrato la validità di un teorema di mappa dispari tipo Borsuk (cioè, sostanzialmente, che un'applicazione dispari ha grado dispari) sia per le applicazioni quasi Fredholm sia per le α-Fredholm.

• In collaborazione con P. Benevieri, M. Furi e M.P. Pera (Università di Firenze) ci siamo occupati dello studio delle *equazioni con ritardo sulle varietà differenziabili.* Inizialmente abbiamo considerato equazioni del tipo $x'(t) = \lambda f(t, x(t), x(t-1))$, dove $\lambda \geq 0$ è un parametro reale e f è un campo vettoriale tangente T-periodico. Abbiamo ottenuto risultati di biforcazione globale (alla Rabinowitz) per soluzioni T-periodiche di tali equazioni, applicando la teoria dell'indice di punto fisso per applicazioni negli ANR (*absolute neighborhood retracts*). La *teoria dell'indice di punto fisso* è strettamente legata a quella del grado topologico. È possibile definire l'indice di punto fisso, ad esempio, per le applicazioni tra varietà differenziabili o, più in generale, per applicazioni localmente compatte tra ANR (cfr. Granas, 1972).

Questo filone di ricerca prende spunto da alcuni articoli di Furi e Pera che riguardano equazioni differenziali ordinarie (cioè il caso senza ritardo). La motivazione principale di questo studio è rappresentata dalle applicazioni a teoremi di esistenza per equazioni del second'ordine sulle varietà. Infatti le equazioni del second'ordine possono essere pensate come equazioni di moto con un termine forzante T-periodico, con o senza attrito, ed è particolarmente interessante dimostrare l'esistenza di *oscillazioni forzate* cioè soluzioni periodiche dello stesso periodo T. Nel caso senza ritardo, Furi e Pera hanno provato l'esistenza di oscillazioni forzate, in presenza di attrito, per equazioni su varietà con *caratteristica di Eulero–Poincaré* diversa da zero. Nel caso senza attrito gli stessi autori hanno provato l'esistenza di oscillazioni forzate per le sfere di dimensione pari. Si noti che il caso generale delle varietà con caratteristica di Eulero–Poincaré diversa da zero resta un problema aperto e particolarmente interessante.

Descriviamo ora più in dettaglio il problema da noi considerato. Sia M una varietà differenziabile (regolare, eventualmente con bordo) immersa in $\mathbb{R}^k$. Sia $f : \mathbb{R} \times M \times M \to \mathbb{R}^k$ continua, T-periodica nella prima variabile e tangente ad M nella seconda variabile: i.e., $f(t+T, p, q) = f(t, p, q) \in T_pM$ per ogni $(t, p, q) \in \mathbb{R} \times M \times M$. Consideriamo la seguente equazione differenziale con ritardo, dipendente dal parametro $\lambda \geq 0$:

$$x'(t) = \lambda f(t, x(t), x(t-1)). \tag{1}$$

Diciamo che una T-*soluzione* di (1) è una coppia (λ, x) dove $\lambda \geq 0$ e $x : \mathbb{R} \to M$ è soluzione T-periodica di (1) in corrispondenza di λ. È conveniente considerare l'insieme delle T-soluzioni di (1) come un sottoinsieme di $[0, +\infty) \times C_T(M)$, dove con $C_T(M)$ denotiamo l'insieme delle applicazioni continue T-periodiche da $\mathbb{R}$ in M contenuto nello spazio di Banach $C_T(\mathbb{R}^k)$. Una T-soluzione (λ, x) si dice *banale* se $\lambda = 0$. In tal caso, x è costante a valori in M e può essere pertanto identificata con un punto di M.

In [5], assumendo che M sia compatta con caratteristica di Eulero–Poincaré diversa da zero, che $T \geq 1$ e che il campo vettoriale f *punti verso l'interno* di M nei punti del bordo ∂M (quando $\partial M \neq \emptyset$), abbiamo dimostrato l'esistenza di un ramo connesso e non limitato (rispetto a λ) di T-soluzioni non banali, la cui chiusura interseca l'insieme delle T-soluzioni banali in un insieme di *punti di biforcazione*. Questi sono punti di *biforcazione atipica* nel senso di Prodi–Ambrosetti. La dimostrazione adottata in [5] si basa sulla teoria dell'indice di punto fisso per mappe localmente compatte tra ANR, applicata a un operatore di T-traslazione (analogo al classico operatore di Poincaré).

Il risultato ottenuto in [5] è stato applicato in [7] alla dimostrazione dell'esistenza di oscillazioni forzate, in presenza di attrito, per equazioni del second'ordine con ritardo sulle varietà compatta (senza bordo) con caratteristica di Eulero–Poincaré diversa da zero. L'osservazione che sta alla base del risultato in [7] è che un'equazione del second'ordine su una varietà N si può considerare come un sistema del prim'ordine sul fibrato tangente TN.

In [9] abbiamo affrontato il caso $0 < T < 1$. Applicando la teoria dell'indice di punto fisso, sviluppata da Eells–Fournier e Nussbaum, per applicazioni C^1 definitivamente addensanti (*eventually condensing*) tra ANR, abbiamo provato un risultato di biforcazione globale come in [5]. Per motivi tecnici abbiamo provato questo risultato nell'ipotesi più restrittiva in cui la varietà M (compatta, con caratteristica di Eulero–Poincaré diversa da zero) sia senza bordo. Successivamente abbiamo semplificato la dimostrazione e indebolito le ipotesi ammettendo anche che $\partial M \neq \emptyset$ e ciò ci permette di dedurre un risultato di esistenza per equazioni del secondo ordine (si veda il lavoro [13]).

In [10] abbiamo affrontato il caso, tecnicamente più complicato, in cui la varietà M non è necessariamente compatta e $T > 0$, ottenendo un risultato di biforcazione globale che estende completamente quelli contenuti nei lavori precedenti. Lo strumento usato è ancora la teoria dell'indice di punto fisso per applicazioni definitivamente addensanti tra ANR. Abbiamo inoltre applicato il risultato di biforcazione globale all'esistenza di oscillazioni forzate per le equazioni differenziali con ritardo del secondo ordine su varietà compatte senza bordo, in presenza di attrito, estendendo al caso $T > 0$ il risultato precedentemente ottenuto in [7].

• Successivamente, sempre in collaborazione con P. Benevieri, M. Furi e M.P. Pera, abbiamo approfondito lo studio delle equazioni con ritardo sulle varietà differenziabili affrontando il caso molto più generale di equazioni funzionali (*retarded functional differential equations*) del tipo $x'(t) = f(t, x_t)$.

Sia M una varietà differenziabile (regolare, eventualmente con bordo) immersa in $\mathbb{R}^k$. Supponiamo che M sia compatta. Sia $f : \mathbb{R} \times C((-\infty, 0], M) \to \mathbb{R}^k$ un'applicazione continua con la proprietà seguente:

$$f(t, \varphi) \in T_{\varphi(0)} M\,, \quad \forall\, (t, \varphi) \in \mathbb{R} \times C((-\infty, 0], M).$$

Diremo allora che f è un *campo vettoriale tangente funzionale*. Supponiamo che il campo funzionale f sia T-periodico nella prima variabile, abbia immagine limitata, e punti verso l'interno di M (in un senso opportuno) quando $\partial M \neq \emptyset$. Studiamo la seguente equazione:

$$x'(t) = f(t, x_t), \tag{2}$$

dove, fissato $t \in \mathbb{R}$, la funzione x_t è definita in modo standard da $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in (-\infty, 0]$ (si veda ad es. il libro di Hale e Verduyn Lunel, 1993).

In [11] abbiamo dimostrato che se la caratteristica di Eulero–Poincaré di M è diversa da zero e il campo funzionale f è limitato e verifica un'opportuna ipotesi di lipschitzianità, allora l'equazione (2) ammette soluzione T-periodica. Anche in questo caso abbiamo dedotto l'esistenza di oscillazioni forzate per equazioni funzionali del secondo ordine su varietà compatte senza bordo, in presenza di attrito.

Nel lavoro [18] abbiamo studiato la biforcazione sia per equazioni del tipo $x'(t) = f(\lambda, t, x_t)$ sia per equazioni con ritardo del second'ordine (che possono essere considerate come equazioni di moto, eventualmente con attrito) del tipo

$$x''_\pi(t) = \lambda \left(F(t, x_t) - \varepsilon x'(t) \right),$$

dove $\lambda \geq 0$, F è un campo vettoriale tangente funzionale, $\varepsilon \geq 0$ rappresenta il coefficiente d'attrito e con la notazione $x''_\pi(t)$ intendiamo la componente tangenziale dell'accelerazione $x''(t)$, ovvero la proiezione di $x''(t)$ su $T_{x(t)}M$. I risultati da noi ottenuti richiedono ipotesi come in [11], ovvero che M è compatta con caratteristica di Eulero–Poincaré diversa da zero e il campo funzionale F è limitato e verifica un'opportuna ipotesi di lipschitzianità. Lo strumento utilizzato è la teoria dell'indice di punto fisso per applicazioni localmente compatte negli ANR.

Più recentemente, sfruttando il risultato di biforcazione ottenuto in [18], nel lavoro [19] abbiamo provato l'esistenza di oscillazioni forzate per equazioni con ritardo del second'ordine del tipo

$$x''_\pi(t) = F(t, x_t)$$

nel caso delle sfere di dimensione pari, generalizzando i lavori già citati di Furi e Pera.

Attualmente stiamo affrontando lo studio di equazioni funzionali del tipo $x'(t) = f(\lambda, t, x_t)$ su varietà non compatte. Rimuovendo l'ipotesi di compattezza di M emergono notevoli difficoltà tecniche. Nel lavoro [24] ci proponiamo di studiare le proprietà generali di tali equazioni, come l'esistenza di soluzioni, l'unicità e la dipendenza continua dai dati.

• In collaborazione con M. Furi e A. Vignoli (Università di Roma Tor Vergata) ci siamo occupati del problema di definire un concetto di *spettro in un punto* per applicazioni (non lineari) continue tra spazi di Banach (vedi [12]).

La motivazione di questo studio risiede in una serie di lavori sullo spettro non lineare di questi autori: il già citato lavoro sullo *spettro asintotico* di Furi, Martelli e Vignoli del 1978 e un precedente lavoro sullo spettro in un punto di Furi e Vignoli (1977).

In [12] ci siamo proposti di estendere e, in un certo senso, completare la definizione di spettro in un punto in modo che siano verificate certe proprietà.

Più nel dettaglio, siano E uno spazio di Banach (reale o complesso), $f : U \to E$ un'applicazione continua definita nell'aperto U di E e p un punto in U. In [12] abbiamo introdotto il concetto di *spettro di f in p*, denotato $\sigma(f, p)$. Questo nuovo spettro verifica molte proprietà in comune con lo spettro asintotico di Furi–Martelli–Vignoli. Ad esempio è sempre chiuso e, nel caso lineare, coincide con lo spettro usuale. D'altra parte il nostro spettro (nel caso C^1) è legato alla derivata di Fréchet di f nel punto p, mentre quello di Furi–Martelli–Vignoli è legato alla derivata asintotica di f. In particolare abbiamo dimostrato che, se $f : U \to E$ è C^1, lo spettro di f in un punto $p \in U$ è uguale allo spettro della derivata di Fréchet $f'(p)$. Di conseguenza, se $L : E \to E$ è lineare e continuo, allora $\sigma(L, p)$ non dipende da p e coincide con lo spettro classico $\sigma(L)$. Quindi, ad esempio, nel caso complesso lo spettro delle applicazioni di classe C^1 è sempre non vuoto.

La nostra definizione di spettro in un punto è basata sui due numeri già ricordati $\alpha_p(f)$ e $\omega_p(f)$, introdotti nella mia tesi di dottorato [26], associati all'applicazione f e al punto p. In [12] abbiamo anche fornito alcune applicazioni dello spettro in un punto alla teoria della biforcazione.

Nel lavoro espositivo [14] abbiamo confrontato la nostra teoria spettrale con alcune di quelle esistenti in letteratura, come ad esempio lo spettro di W. Feng (1997) e il *phantom* di M. Väth (2000).

Più recentemente, in collaborazione con J. Appell e A. Schmied (Università di Würzburg) abbiamo indagato altre nozioni di spettro in un punto collegate sia con lo spettro definito in [12] sia con il phantom di Väth (cfr. [17]). Stiamo attualmente approfondendo questo studio con l'obiettivo di fornire applicazioni a problemi di biforcazione per operatori differenziali, come ad esempio il p-laplaciano.

• In collaborazione con F. Alessio e P. Montecchiari (Università Politecnica delle Marche) ci siamo occupati dello studio di una classe di equazioni semilineari ellittiche in due dimensioni (equazioni di tipo Allen–Cahn).

Prendendo spunto da alcuni lavori recenti di vari autori (tra cui Schatzman, Shi, Alama–Bronsard–Gui) in [6] abbiamo affrontato lo studio della molteplicità di soluzioni intere per tali equazioni utilizzando tecniche dell'analisi non lineare. In particolare abbiamo dimostrato l'esistenza di soluzioni di tipo sella (*saddle type solutions*) per equazioni modellate sull'equazione di Allen–Cahn nel caso planare autonomo. Il nostro risultato mostra l'esistenza di infinite (geometricamente distinte) soluzioni intere, limitate e non radiali, delle equazioni da noi considerate.

• In collaborazione con C. Marcelli e F. Papalini (Università Politecnica delle Marche) abbiamo affrontato lo studio dell'esistenza di soluzioni limitate, omocline ed eterocline, definite su intervalli non compatti della retta reale, per equazioni non autonome fortemente non lineari, anche in presenza di termini funzionali (cfr. [15]).

Questo studio è motivato da numerose applicazioni in modelli di varie scienze. In particolare la ricerca di soluzioni eterocline si applica allo studio della propagazione di *fronti d'onda* per equazioni paraboliche alle derivate parziali, di tipo reazione-diffusione-convezione anche con argomenti con ritardo o con termini non locali (quali ad esempio prodotti di convoluzione su tutto lo spazio). Tali equazioni intervengono in alcuni modelli di dinamica delle popolazioni, di combustione e di transizione di fase e sono state oggetto recentemente di studio da parte di diversi autori. Si vedano in questo contesto le monografie di Fife (1979), Murray (1993) e Gilding-Kersner (2004).

Nel lavoro [15], combinando tecniche di sopra e sotto soluzioni e teoremi di punto fisso, sotto opportune ipotesi abbiamo dimostrato l'esistenza di soluzioni per un problema ai limiti associato a un'equazione differenziale ordinaria con un termine funzionale. Abbiamo poi applicato il nostro risultato all'esistenza di soluzioni di tipo fronte d'onda per equazioni di reazione-diffusione con termini non locali e con ritardo.

Sempre in collaborazione con C. Marcelli e F. Papalini stiamo attualmente affrontando lo studio di problemi ellittici non lineari governati da un operatore tipo p-laplaciano, studiando in particolare la molteplicità di soluzioni, l'esistenza di soluzioni radiali, positive e che cambiano segno. Ad esempio, per quanto riguarda le soluzioni eterocline, citiamo in particolare le due monografie di Gasinski e Papageorgiou (2005 e 2006).

In questo contesto si colloca il mio lavoro [21], in cui affronto lo studio dell'esistenza di soluzioni eterocline su tutta la retta reale per un problema differenziale fortemente non lineare in cui è presente un operatore detto Φ-*laplaciano singolare*. L'operatore Φ-laplaciano rappresenta una generalizzazione del p-laplaciano, ma non è omogeneo e nel nostro caso ha dominio limitato (operatore singolare). Per questo tipo di problemi abbiamo fornito condizioni per l'esistenza e la non esistenza di soluzioni.

• Un ulteriore argomento relativo alle *equazioni differenziali su varietà* riguarda l'applicazione di metodi topologici allo studio delle soluzioni periodiche di equazioni algebro-differenziali in forma semi esplicita. Sotto opportune ipotesi infatti lo studio di tali equazioni può essere ricondotto a quello di equazioni ordinarie su una certa varietà differenziabile (cfr. [20]). In collaborazione con M. Spadini (Università di Firenze) stiamo ora approfondendo lo studio di questo tipo di problemi (cfr. [23]).

• Nel contesto dei *sistemi dinamici*, in collaborazione con M. Franca (Università Politecnica delle Marche) abbiamo in progetto di studiare, tramite funzioni di Melnikov, la persistenza di soluzioni omocline e la transizione al caos in problemi perturbativi con campi discontinui, quando il problema imperturbato possiede un'orbita omoclina che attraversa trasversalmente (o tangenzialmente) la varietà di discontinuità (cfr. [22]).

Tematiche relative a problemi perturbativi (sia per sistemi dinamici perturbati singolarmente, sia con campi discontinui), come ad esempio la costruzione di opportune funzioni di Melnikov, hanno suscitato di recente grande interesse in relazione alle loro applicazioni fisiche e numeriche (ad esempio teoria del controllo, problemi con attrito strisciante, ecc.). Citiamo tra gli altri autori F. Battelli e M. Fečkan.

Altre attività

- Da agosto 2007 sono *reviewer* per "Mathematical Reviews".
- Faccio parte del comitato organizzatore del convegno "Ordinary Differential Equations and Applications" che si svolgerà ad Ancona nei giorni 15–17 settembre 2010.

Tutte le dichiarazioni riportate in questo curriculum corrispondono a verità ai sensi delle norme in materia di dichiarazioni sostitutive di cui all'art.46 del D.P.R. n.445 del 28/12/2000.