

## PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA 2 INGEGNERIA INFORMATICA E DELL'AUTOMAZIONE

Anno Accademico: 2013-2014

Facoltà di Ingegneria – Università Politecnica delle Marche

Docente: DOTT. ALESSANDRO CALAMAI

### **Funzioni di più variabili**

Lo spazio  $\mathbb{R}^n$ . Norma e distanza. Intorno sferico. Punti di accumulazione, punti isolati. Punti interni. Sottoinsiemi aperti e chiusi. Frontiera e chiusura di un insieme.

Funzioni reali di più variabili reali. Dominio, grafico, insiemi di livello. Definizione di limite per funzioni di più variabili. Limiti direzionali. Algebra dei limiti. Teoremi dell'unicità del limite, della permanenza del segno, dei carabinieri. Continuità per funzioni di più variabili. Continuità delle funzioni combinate. Teorema di Weierstrass. Derivate parziali. Derivate direzionali. Differenziabilità. Piano tangente al grafico. Teorema del differenziale totale.

Massimi e minimi relativi. Teorema di Fermat. Condizione necessaria del primo ordine per i punti estremanti. Punti critici. Massimi e minimi assoluti. Derivate seconde. Teorema di Schwarz. Matrice hessiana. Condizione sufficiente del secondo ordine per i punti estremanti. Esempi.

### **Curve. Integrali curvilinei. Forme differenziali.**

Funzioni a valori vettoriali. Definizione di limite e di funzione continua. Curve (arco di curva parametrica). Definizione di curva continua, semplice e chiusa. Derivata di una curva: significato geometrico. Retta tangente. Curve regolari e generalmente regolari. Curve in coordinate polari. Esempi di curve. Curve rettificabili. Lunghezza di una curva. Teorema di rettificabilità delle curve regolari. Cambiamenti di parametro. Curve equivalenti. Orientazione. Invarianza della lunghezza. Ascissa curvilinea. Curve nello spazio. Curvatura. Versore tangente, normale e binormale. Triedro fondamentale. Esempi.

Integrale curvilineo (di prima specie) di una funzione. Invarianza dell'integrale per parametrizzazioni equivalenti e cambi di orientazione. Applicazioni: calcolo del baricentro e dei momenti d'inerzia rispetto a un asse fissato di una linea materiale.

Campi vettoriali nello spazio. Lavoro di un campo di forze lungo un cammino orientato. Forme differenziali lineari nello spazio. Forme differenziali lineari in  $\mathbb{R}^n$ .

Integrale di una forma lungo una curva orientata, o integrale curvilineo di seconda specie. Forme esatte. Primitive di una forma in un aperto connesso. Indipendenza dell'integrale dal cammino. Campi conservativi. Teorema di caratterizzazione delle forme esatte. Forme esatte e chiuse in  $\mathbb{R}^2$ . Forme chiuse in un rettangolo. Esempio di forma chiusa ma non esatta. Aperti semplicemente connessi. Teorema di Poincaré. Forme in  $\mathbb{R}^3$  e campi vettoriali. Forme esatte e campi conservativi. Potenziale. Forme chiuse e campi irrotazionali. Calcolo di primitive. Calcolo di integrali tramite le primitive.

### **Integrali multipli.**

Integrale doppio di una funzione limitata in un rettangolo. Integrabilità delle funzioni continue. Interpretazione dell'integrale doppio come volume. Teorema di Fubini per i rettangoli. Integrale su un insieme limitato. Insiemi semplici e insiemi regolari. Formule di riduzione. Insiemi misurabili e loro area. Esempio di una funzione limitata non integrabile. Applicazioni dell'integrale doppio al calcolo del baricentro e dei momenti d'inerzia rispetto a un asse fissato di una piastra materiale. Trasformazioni di coordinate ammissibili. Formula del cambiamento di coordinate negli integrali doppi. Coordinate polari nel piano. Integrale triplo. Funzioni limitate in un parallelepipedo. Teorema di Fubini per gli integrali tripli. Integrale su un insieme limitato di  $\mathbb{R}^3$ . Insiemi misurabili e loro volume. Integrazione per fili e per strati. Formule di riduzione. Applicazioni dell'integrale triplo al calcolo del baricentro e dei momenti d'inerzia rispetto a un asse fissato di un corpo solido. Trasformazioni di coordinate ammissibili. Formula del cambiamento di coordinate negli integrali tripli. Coordinate sferiche e coordinate cilindriche nello spazio. Teorema di Jordan. Convenzione sull'orientazione dei circuiti nel piano. Domini regolari nel piano. Orientazione positiva del bordo. Formula di Gauss-Green.

**Equazioni differenziali ordinarie.**

Equazioni del primo ordine. Definizione di soluzione. Integrale generale. Condizione iniziale. Problema di Cauchy. Soluzioni massimali. Teorema di esistenza di Peano. Teorema di esistenza e unicità. Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine. Formula risolutiva.

Equazioni differenziali di ordine superiore al primo. Equazioni di ordine  $n$  in forma normale. Definizione di soluzione. Condizione iniziale. Problema di Cauchy. Esistenza e unicità di soluzioni massimali.

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Integrale generale. Equazione omogenea associata. Teorema di struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare non omogenea. Equazioni omogenee. Integrale generale. Polinomio caratteristico. Dimensione dell'insieme delle soluzioni di un'equazione omogenea. Soluzioni linearmente indipendenti. Soluzioni complesse. Esempi.

**Funzioni di una variabile complessa. Funzioni olomorfe. Residui.**

Il campo complesso. Potenze e radici  $n$ -esime. Esponenziale complesso. Formula di Eulero. Funzioni di una variabile complessa. Funzioni elementari. Limiti e continuità. Funzioni inverse e regioni fondamentali. Logaritmo complesso. Continuità del logaritmo e delle potenze in campo complesso. Funzioni olomorfe. Derivabilità e differenziabilità. Condizioni di Cauchy-Riemann. Oloromia delle funzioni elementari. Condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari. Curve regolari e integrali curvilinei. Integrazione in campo complesso. Primitive di una funzione. Primitive e forme differenziali lineari. Teorema dell'integrale nullo di Cauchy. Formula integrale di Cauchy. Applicazioni.

Serie di potenze in campo complesso. Teorema di derivazione per serie. Funzioni analitiche. Analiticità delle funzioni olomorfe. Proprietà delle funzioni analitiche. Zeri di funzioni analitiche. Principio di identità. Prolungamento analitico. Punti di singolarità isolata e loro classificazione. Residui. Calcolo di residui nel caso di poli. Serie bilatere. Sviluppo in serie di Laurent. Teorema di sviluppabilità. Classificazione delle singolarità isolate con le serie di Laurent e applicazione al calcolo di residui. Teorema dei residui. Lemma del grande cerchio e del piccolo cerchio. Lemma di Jordan. Calcolo di integrali con il metodo dei residui.

**Trasformate di Fourier e di Laplace.**

Richiami sugli integrali impropri. Funzioni sommabili. Definizione di trasformata di Fourier (TF). Linearità e simmetrie. Teorema della convergenza dominata. Continuità e proprietà asintotiche della TF. Formula di inversione e di dualità. Proprietà algebriche e differenziali della TF. TF della derivata e derivata della TF. TF della gaussiana. I teoremi di Fubini e Tonelli. Prodotto di convoluzione e sua TF. Funzioni a decrescenza rapida e operatore TF su tale spazio. Teorema di Plancherel.

Definizione di trasformata di Laplace (TL). Proprietà asintotiche della TL. Proprietà algebriche e differenziali della TL. TL della derivata e derivata della TL. Teorema del valore finale e del valore iniziale. Inversione della TL e legame con la trasformata di Fourier.

Utilizzo della Trasformata di Laplace nelle equazioni differenziali. Inversione delle funzioni razionali fratte. Equazioni differenziali con dati discontinui.

**Testi di riferimento:**

- “Analisi Matematica 2” – M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Ed.Zanichelli.
- “Matematica per l'ingegneria dell'informazione” – G.C. Barozzi, Ed.Zanichelli.