Esercizi di riepilogo

1. Risolvi il seguente sistema, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 2x + ky + kz = 1 \\ kx + 2y + kz = 1 \\ kx + ky + 2z = 1 \end{cases}$$

2. Sia L lo spazio delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3w = 5, \\ z = 1 \\ x + \frac{2}{3}y + z - w = \frac{8}{3} \end{cases}$$

e sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (i) scrivi le equazioni parametriche di L come sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$.

   (ii) Sia W il sottospazio di giacitura di L. Trova una base di W.

   (iii) Sia $U = \operatorname{Im} L_A$. Trova una base di U.

   (iv) Trova la dimensione e una base di $U + W$.

   (v) Trova la dimensione e una base di $U \cap W$.

3. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

   (i) Calcola la dimensione di W e trovane una base

   (ii) Scrivi le equazioni parametriche di W

   (iii) Scegli un supplementare U di W e scrivine sia le equazioni parametriche che le equazioni cartesiane

4. Considera l'applicazione $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$ data da $T(p(t)) = p(2) - 2\,p'(t)$.

   (i) Verifica che T è lineare.

   (ii) Scrivi la matrice associata a T rispetto a una base a tua scelta.

   (iii) Determina nucleo e rango di T.

   (iv) Calcola il polinomio caratteristico di T e determinane gli autovalori.

   (v) Stabilisci se T è diagonalizzabile o no.

5. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -9 \\ -k & 1 & k-2 \end{pmatrix}.$$

[0]Università Politecnica delle Marche, Corso di Geometria, docente Chiara Brambilla

(i) Calcola il polinomio caratteristico di A_k e trovane gli autovalori;

(ii) stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;

(iii) per i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile trova una base di autovettori.

6. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k+4 & 0 & -k-2 \\ 0 & 3 & k+2 \\ -k-2 & 0 & k+4 \end{pmatrix}.$$

(i) Trova gli autovalori di A_k;

(ii) stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;

(iii) per i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile trova una base di autovettori;

(iv) per i valori di k per cui A_k non è diagonalizzabile trovane gli autovettori.

7. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, considera l'applicazione lineare

$$T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$$

$$T(M) = 2M + AM$$

(i) verifica che T è lineare;

(ii) scrivi la matrice associata a T rispetto alla base canonica dello spazio delle matrici.

(iii) Determina nucleo e immagine di T.

(iv) Calcola il polinomio caratteristico di T e determinane gli autovalori con le relative molteplicità

(v) Stabilisci se T è diagonalizzabile e in caso affermativo trova una base di autovettori.

8. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2-2k & -3k & 5k-2 \\ 2k-9 & 3k-9 & 18-5k \\ -5 & -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

(i) Trova gli autovalori di A_k;

(ii) stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.

9. Considera l'applicazione $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1$$

(i) Dimostra che $\langle\ ,\ \rangle$ è una forma bilineare simmetrica;

(ii) scrivi la matrice associata a tale forma rispetto a una base di tua scelta;

(iii) stabilisci se tale forma è degenere o non degenere;

(iv) determina se è (semi-)definita positiva, negativa o indefinita.

10. Considera l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(t^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(i) Scrivi la matrice associata a T rispetto a basi di tua scelta;

(ii) trova la dimensione del nucleo e dell'immagine di T;

(iii) trova una base ortonormale di $V = \operatorname{Ker} T$ rispetto al prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}_2[t]$;

(iv) trova una base ortonormale di $V^\perp$;

(v) trova una base ortonormale di $W = \operatorname{Im} T$ rispetto al prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^3$.

11. Considera l'applicazione $\langle \ , \ \rangle : \mathbb{R}_3[t] \times \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\langle p, q \rangle = p'(1)q'(1) - 6p''(0)q(1) - 6p(1)q''(0) - \frac{1}{6}p'''(2)q'''(2)$$

(i) Dimostra che $\langle \ , \ \rangle : \mathbb{R}_3[t] \times \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}$ è una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}_3[t]$;

(ii) scrivi la matrice associata a tale forma rispetto a una base di tua scelta;

(iii) stabilisci se tale forma è degenere o non degenere;

(iv) determina se è (semi-)definita positiva, negativa o indefinita.

12. Considera l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[t]$ data da

$$T(x) = (x_1 - x_3)t^2 + (x_1 + x_3 + 5x_4)t + 2x_1 + 5x_4$$

(i) Trova una base ortonormale di $V = \ker T$.

(ii) Trova una base ortonormale di $V^\perp$.

(iii) Verifica che $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^4$.

(iv) Scrivi la matrice associata alla proiezione ortogonale $P_V : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ rispetto a una base di tua scelta.