PROGRAMMA DEL CORSO DI GEOMETRIA
INGEGNERIA BIOMEDICA

Anno Accademico: 2011-2012
Facoltà di Ingegneria – Università Politecnica delle Marche
Docente: DOTT. CHIARA BRAMBILLA

Definizione di campo. Definizione di spazio vettoriale reale. Esempi di spazi vettoriali: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[t]$, lo spazio delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{R})$, lo spazio delle funzioni a valori reali, lo spazio nullo. Definizione di sottospazio vettoriale. Esempi di sottospazi vettoriali: le rette per l'origine, i piani per l'origine, lo spazio $\mathbb{R}_d[t]$ dei polinomi di grado al massimo d, lo spazio delle matrici a traccia nulla.

Combinazioni lineari e sottospazio generato da k vettori, $\mathrm{Span}(v_1, ..., v_k)$. Definizione di sistema di generatori. Definizione di dipendenza lineare e di indipendenza lineare Definizione di base di uno spazio vettoriale. Esempi di basi: base canonica di $\mathbb{R}^n$, base delle matrici elementari, base dei monomi. Coordinate rispetto a una base. Teorema delle coordinate. Insiemi massimali di generatori linearmente indipendenti e loro caratterizzazione come basi. Esistenza base di uno spazio finitamente generato. Teorema del completamento. Corollari del teorema del completamento. Definizione di dimensione di uno spazio vettoriale.

Sottospazi somma e intersezione Teorema di Grassmann Somma diretta e sottospazi supplementari Unicita' della decomposizione rispetto a due sottospazi supplementari Esistenza (e non unicita') del supplementare

Richiami sulla teoria delle funzioni: applicazioni iniettive, suriettive e biunivoche. Definizione di applicazione lineare. Esempi: applicazione identita', applicazione nulla, traccia di una matrice quadrata. Applicazione lineare coordinate $F_{\mathcal{B}}$. Applicazione lineare L_A associata a una matrice A. Applicazione lineare derivata di un polinomio. Teorema dell'applicazione lineare. Definizione di nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Nucleo e immagine sono sottospazi. Criterio di iniettivita' e suriettivita' per un'applicazione lineare. Generatori dell'immagine di un'applicazione lineare. Definizione di rango di una applicazione lineare. Rango di una matrice. Trasposta di una matrice. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$ (senza dimostrazione) Teorema della dimensione. Corollari del teorema della dimensione.

Sistemi lineari: matrice dei coefficienti e matrice completa Teorema di struttura per i sistemi lineari Definizione di sottospazio affine. Equazioni parametriche e cartesiane di rette e piani di $\mathbb{R}^3$. Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$. Teorema di Rouché-Capelli. Matrici e sistemi a scala. Risoluzione all'indietro. Rango e immagine di una matrice a scala. Operazioni elementari del metodo di Gauss. Metodo di Gauss: algoritmo per ridurre a scala una matrice qualsiasi. Teorema riassuntivo su sistemi qualsiasi. Risoluzione di sistemi tramite la riduzione a scala.

Calcolo di base e dimensione di immagine e nucleo di L_A. Studio di sistemi con parametro. Tecniche di calcolo: trovare una base di Span. Tecniche di calcolo: completare a una base. Tecniche di calcolo: base di somma e intersezione. Tecniche di calcolo: come si passa da equazioni cartesiane a parametriche e viceversa.

Lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari tra V e W. Composizione di applicazioni lineari e proprieta'. Definizione di applicazione lineare invertibile (o isomorfismo). Caratterizzazione degli isomorfismi. Definizione di spazi isomorfi. Essere isomorfi e' relazione di equivalenza. L'isomorfismo coordinate tra V e $\mathbb{R}^n$. L'isomorfismo tra lo spazio delle applicazioni lineari tra $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ e lo spazio delle matrici $m \times n$. Definizione del prodotto righe per colonne. Proprieta' del prodotto righe per colonne.

Definizione di matrice invertibile e proprieta' dell'inversa. Caratterizzazione delle matrici invertibili (teorema delle 11 equivalenze). Calcolo dell'inversa di una matrice (tramite riduzione a scala). Matrice di cambiamento di base: definizione ed esempi. Calcolo della matrice di cambiamento di base tramite una base ausiliaria. Matrice associata ad una applicazione lineare da V in W rispetto a basi fissate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$: definizione ed esempi. L'isomorfismo tra lo spazio delle applicazioni lineari tra V e W e lo spazio delle matrici $m \times n$. Come cambia la matrice associata ad una applicazione lineare al variare delle basi. Matrici simili. La similitudine e' relazione di equivalenza.

Il determinante di una matrice di ordine 2 e le sue proprieta'. Definizione assiomatica del determinante (senza dimostrazione). Proprieta' del determinante. Sviluppo di Laplace rispetto a una riga o a una colonna. Esempi. Metodo di Sarrus per matrici di ordine 3. Legame tra determinante e invertibilita' della matrice. Teorema di Binet (senza dimostrazione). Corollari del teorema di Binet (con dimostrazione) e teorema di Cramer (senza dimostrazione).

Definizione di autovettore, autovalore, spettro, autospazio. L'autospazio e' sottospazio vettoriale. Interpretazione dell'autospazio come nucleo. Endomorfismi e matrici diagonalizzabili. Il polinomio caratteristico di un endomorfismo e le sue proprieta'. Legame tra polinomio caratteristico e autovalori di T. Criterio necessario per la diagonalizzabilita'. Lineare indipendenza di autovettori relativi ad autovalori distinti. Criterio sufficiente per la diagonalizzabilita'. Molteplicita' algebrica e geometrica di un autovalore. Relazione tra molteplicita' algebrica e geometrica. Criterio necessario e sufficiente per la diagonalizzabilita' di un endomorfismo (senza dimostrazione). Schema per lo studio della diagonalizzabilita'.

Prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$: definizione e proprieta'. Definizione di forma bilineare simmetrica. Definizione di forma degenere e non degenere. Definizione di forma definita positiva (negativa), semidefinita positiva (negativa), indefinita. Relazione tra degenericita' e segno di una forma bilineare simmetrica. Matrice associata a una forma bilineare. Come cambia la matrice al variare della base. Matrici congruenti. Proprieta' della matrice che rappresenta la forma bilineare (Teorema 1 e 2). Criterio necessario e sufficiente per la congruenza di due matrici simmetriche (senza dimostrazione). Criterio per lo studio del segno di un prodotto scalare (Teorema 3) (senza dimostrazione). Regola di Cartesio per calcolare il numero di radici positive, negative e nulle.

Definizione di spazio vettoriale metrico, norma. Proprieta' della norma. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e disuguaglianza triangolare. Definizione di distanza e angolo. Definizione di vettori ortogonali. Vettori ortogonali sono linearmente indipendenti. Basi ortogonali e ortonormali. Teorema dei coefficienti di Fourier. Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (senza dimostrazione). Definizione di proiezione ortogonale e sue proprieta'. Definizione di ortogonale di un sottoinsieme e di supplemento ortogonale di un sottospazio. Relative proprieta'.

Definizione di endomorfismo simmetrico in uno spazio metrico. Proprieta' della matrice associata a un endomorfismo simmetrico. Autovettori relativi ad autovalori distinti di un endomorfismo simmetrico sono ortogonali. Teorema spettrale (con dimostrazione, esclusa la dimostrazione del Lemma 2: un endomorfismo simmetrico ammette un autovalore reale). Corollari del teorema spettrale. Definizione di matrice ortogonale e proprieta'. Dimostrazione del criterio sufficiente di congruenza.

Testo di riferimento:

• "Geometria analitica con elementi di algebra lineare." – M. Abate, C. de Fabritiis, Ed.McGraw-Hill.