Appunti su coniche e quadriche

Coniche

- Equazione di una conica in $\mathbb{R}^2$:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

  Equazione matriciale della conica:

$$(x \quad y \quad 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

  dove la matrice A è la matrice dei coefficienti della conica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

  Una conica si dice *non degenere* se $\det(A) \neq 0$, *degenere* se $\det(A) = 0$.

- Una conica si dice *a centro* se $\det(A_{33}) \neq 0$, dove A_{33} è la sottomatrice della parte di secondo grado:

$$A_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

  Il centro C di una conica a centro ha coordinate:

$$x_C = \frac{\det(A_{13})}{\det(A_{33})} \qquad y_C = -\frac{\det(A_{23})}{\det(A_{33})}$$

- La retta tangente alla conica nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$ ha equazione:

$$(x_0 \quad y_0 \quad 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

[0]Università Politecnica delle Marche, Corso di Geometria, docente Chiara Brambilla

Forme canoniche metriche delle coniche:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ellisse reale
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ ellisse immaginaria ($\emptyset$)
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ coppia di rette complesse incidenti (punto)
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ iperbole
5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ coppia di rette incidenti
6. $x^2 - ay = 0$ parabola
7. $\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$ coppia di rette parallele
8. $\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$ coppia di rette complesse parallele ($\emptyset$)
9. $x^2 = 0$ coppia di rette coincidenti

Forme canoniche affini delle coniche:
si pone $a = b = 1$ nella tabella sopra.

Classificazione delle coniche:

	$\det(A) \neq 0$	$\mathrm{rg}(A) = 2$	$\mathrm{rg}(A) = 1$
$\det(A_{33}) > 0$	Ellisse reale (1) o immaginaria (2)	Rette complesse incidenti (3)	
$\det(A_{33}) = 0$	Parabola (6)	Rette parallele reali (7) o complesse (8)	Rette coincidenti (9)
$\det(A_{33}) < 0$	Iperbole (4)	Rette incidenti (5)	

Algoritmo per ridurre una conica alla sua forma canonica metrica

Considero la conica di equazione:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Primo passo:

Per il teorema spettrale posso diagonalizzare la matrice A_{33} trovando gli autovalori λ_1 e λ_2 e una base ortonormale di autovettori $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$.

Sia

$$B = (v_1 v_2) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

la matrice di cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$.

Applico il cambiamento di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ cioè

$$\begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' \\ y = b_1 x' + b_2 y' \end{cases}$$

e ottengo un'equazione della forma:

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + 2ax' + 2by' + a_{33} = 0.$$

Secondo passo:

Primo caso: se entrambi gli autovalori sono diversi da 0.

Applico la traslazione:

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{a}{\lambda_1} \\ y' = y'' - \frac{b}{\lambda_2} \end{cases}$$

e ottengo l'equazione:

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + c = 0.$$

A seconda del valore dei coefficienti trovo le forme canoniche (1), (2), (3), (4) o (5).

Secondo caso: se uno degli autovalori è 0 (suppongo che sia $\lambda_2 = 0$, altrimenti scambio la x con la y).

Applico la traslazione:

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{a}{\lambda_1} \\ y' = y'' \end{cases}$$

e ottengo

$$\lambda_1 (x'')^2 + 2by'' + c = 0.$$

Se $b = 0$ si ottiene una delle forme (7), (8), (9) a seconda del segno di c.

Se $b \neq 0$ applico un'altra traslazione:

$$\begin{cases} x'' = x''' \\ y'' = y'' - \frac{c}{2b} \end{cases}$$

e ottengo

$$\lambda_1 (x''')^2 + 2by''' = 0,$$

e quindi la forma canonica della parabola (6).

Osservazione: Per ottenere esattamente una delle forme canoniche in tabella è possibile che alla fine sia necessario moltiplicare l'equazione ottenuta per -1 oppure scambiare la x con la y.

Quadriche

- Equazione di una (superficie) quadrica in $\mathbb{R}^3$:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{23}yz + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

  Equazione matriciale della quadrica:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

  dove la matrice A è la matrice dei coefficienti della quadrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

  Una quadrica si dice *non degenere* se $\det(A) \neq 0$, *degenere* se $\det(A) = 0$.

- Una quadrica si dice *a centro* se $\det(A_{44}) \neq 0$, dove A_{44} è la sottomatrice della parte di secondo grado:

$$A_{44} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

- Il piano tangente alla quadrica nel punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ha equazione:

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Forme canoniche metriche delle quadriche:

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ ellissoide reale
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$ ellissoide immaginario ($\emptyset$)
3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$ iperboloide ellittico (a 2 falde)
4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ iperboloide iperbolico (a 1 falda)
5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$ paraboloide ellittico
6. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$ paraboloide iperbolico (a sella)
7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ cono reale
8. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ cono complesso (punto)
9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ cilindro ellittico
10. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ cilindro iperbolico
11. $\frac{x^2}{a^2}-y=0$ cilindro parabolico
12. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ cilindro complesso ($\emptyset$)
13. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ piani incidenti
14. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ piani complessi incidenti (retta)
15. $\frac{x^2}{a^2}-1=0$ piani paralleli
16. $\frac{x^2}{a^2}+1=0$ piani complessi paralleli ($\emptyset$)
17. $x^2=0$ piani coincidenti

Forme canoniche affini delle quadriche:
si pone $a=b=c=1$ nella tabella sopra.

Classificazione delle quadriche:

1. $\det A \neq 0$: quadriche non degeneri.

	$\det(A_{44}) \neq 0$ autoval. A_{44} concordi	$\det(A_{44}) \neq 0$ autoval. A_{44} discordi	$\det(A_{44}) = 0$
$\det(A) < 0$	Ellissoide reale (1)	Iperboloide ell. (3)	Paraboloide ell. (5)
$\det(A) > 0$	Ellissoide imm. (2)	Iperboloide ip. (4)	Paraboloide ip. (6)

2. $\text{rg}\, A = 3$
   - $\det A_{44} \neq 0 \longrightarrow$ Cono (7),(8)
   - $\det A_{44} = 0 \longrightarrow$ Cilindro (9)-(12)
3. $\text{rg}\, A = 2 \longrightarrow$ Piani distinti (13)-(16)
4. $\text{rg}\, A = 1 \longrightarrow$ Piani coincidenti (17)