SPAZI DI MODULI DI FASCI ARITMETICAMENTE COHEN-MACAULAY SU VARIETÀ DI FANO DELLA SERIE PRINCIPALE

MARIA CHIARA BRAMBILLA AND DANIELE FAENZI

Sommario. In the first part of the paper we complete the classification of the arithmetical Cohen-Macaulay vector bundles of rank 2 on a smooth prime Fano threefold.

In the second part, we study some moduli spaces of these vector bundles, using the decomposition of the derived category of X provided by Kuznetsov, when the genus of X is 7 or 9. This allows to prove that such moduli spaces are birational to Brill-Noether varieties of vector bundles on a smmoth projective curve Γ.

When the second Chern class is low we are able to give a more precise description of the moduli space of rank-2 semistable sheaves with fixed Chern classes $\mathsf{M}_X(2, c_1, c_2)$. If $g = 7$, we show that the moduli space $\mathsf{M}_X(2, 1, 6)$ is isomorphic to a smooth irreducible Brill-Noether variety of dimension 3. Moreover the set of vector bundles contained in $\mathsf{M}_X(2, 0, 4)$ is smooth irreducible of dimension 5.

If $g = 9$, we prove that $\mathsf{M}_X(2, 1, 7)$ is isomorphic to the blow-up of $\mathrm{Pic}(\Gamma)$, where Γ is a plane smooth quartic.

If $g = 12$, an open set of $\mathsf{M}_X(2, 1, d)$ can be described as a quotient with respect to the action of a semisimple group in terms of monads.

1. Introduzione

Nel tentativo di classificare i fibrati su una varietà proiettiva Y immersa dal fibrato in rette $\mathscr{O}_Y(1)$, si può partire dai moduli di coomologia, o moduli di Hartshorne-Rao. Dato un fascio F su Y, essi sono definiti come $\mathrm{H}^k_*(F) = \oplus_{t\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}^k(Y, F \otimes \mathscr{O}_Y(t))$, si veda il paragrafo 1.1. In questo senso, la situazione più semplice si ha quando F ha coomologia intermedia nulla, ovvero $\mathrm{H}^k_*(F) = 0$ per $0 < k < n = \dim(Y)$. In tal caso si dice anche che F è aritmeticamente Cohen-Macaulay (aCM).

Un classico teorema di Horrocks, [Hor64], afferma che se $Y = \mathbb{P}^n$ e $\mathscr{O}_Y(1) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, un fibrato è somma diretta di fibrati in rette se e solo se è aCM. Un risultato simile vale per le quadriche lisce, si veda [Knö87], [Ott89]. In questo caso F è aCM se se solo se è somma di fibrati in rette e spinori twistati. D'altronde, dalla classificazione in [EH88], [BGS87], è noto che, se $n \geq 2$, esistono solo altri due esempi di varietà dove l'insieme dei fibrati aCM indecomponibili è finito (a meno di twist).

Entrambi gli autori sono stati parzialmente finanziati dal MIUR. Il secondo autore è stato parzialmente finanziato dall' Université de Pau et des Pays de l'Adour.

È naturale dunque considerare un secondo problema, cioè lo studio delle famiglie (continue) di fibrati. Per ottenere famiglie algebriche di parametri è necessaria la nozione di stabilità: utilizzeremo sia quella di Mumford-Takemoto, sia quella di Gieseker-Maruyama, si veda [HL97] per la teoria completa. Nel caso di varietà di dimensione $n \geq 3$, i casi di spazi di moduli compatti studiati completamente sono ben pochi. Denoteremo con $\mathsf{M}_X(2, c_1, c_2)$ lo spazio dei fasci semistabili di rango 2 su X con classi di Chern c_1, c_2.

Entrambi i problemi descritti sono stati ampiamente studiati nel caso di varietà tridimensionali (o 3-varietà) lisce di Fano. Ricordiamo che una varietà liscia proiettiva è detta di Fano se il suo divisore anticanonico $-K_X$ è ampio. Sia X una tale varietà, e si assuma che $\mathrm{Pic}(X) \cong \langle H_X \rangle$, con H_X ampio. Si ha allora $K_X \cong -i_X\, H_X$, con $1 \leq i_X \leq 4$. Ricordiamo che se $i_X = 4$ la varietà X è lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$, mentre se $i_X = 3$ la varietà X è una quadrica liscia. Dunque, come già detto, l'insieme dei fibrati aCM è completamente noto in questi due casi.

Restano dunque i casi $i_X = 2, 1$, per i quali esiste una classificazione completa delle varietà X, si veda [Isk77], [Isk78], oppure [IP99], e i numerosi riferimenti ivi contenuti. La classificazione dei fibrati aCM, anche solo dal punto di vista topologico, tuttavia, è stata affrontata solo per rango 2 ed è dovuta ad Arrondo e Costa, [AC00], per $i_X = 2$, e a Madonna,[Mad02], per $i_X = 1$.

Lo studio degli spazi di moduli è anch'esso parziale, citiamo solo [Dru00] per la ipersuperficie cubica di $\mathbb{P}^4$, e per alcuni dei casi con $i_X = 1$ ricordiamo i lavori [IM04a], [IM04b], [IM07], [IM00], [IR05],[AF06].

In questo lavoro intendiamo esporre una breve sintesi dei nostri risultati relativi al caso di varietà di Fano della serie principale, cioè con $i_X = 1$ e con divisore anticanonico molto ampio, introdotte in [Fan37]. Gli enunciati sono accompagnati solitamente da un breve schema della dimostrazione. Rimandiamo comunque agli articoli [BF07a], [BF08a], [BF08b] and [BF08c] per le dimostrazioni complete. Per quanto riguarda l'esistenza di fibrati aCM di rango 2, il nostro risultato principale è il seguente (si vedano i teoremi 3.3 e 3.6).

Teorema. *Sia X una varietà tridimensionale di Fano della serie principale di genere g ordinaria. Allora esistono fibrati aCM stabili F di rango 2 con:*

- $c_1(F) = 1$, $c_2(F) = d$ *per* $m_g \leq d \leq g + 3$,
- $c_1(F) = 0$, $c_2(F) = 4$.

Si noti che il lavoro di Madonna [Mad02] già affermava che questi valori delle classi di Chern sono i soli ammissibili per fibrati aCM stabili di rango 2.

La parte più corposa del nostro lavoro riguarda la descrizione degli spazi di moduli nel caso di varietà di Fano della serie principale di genere 7 e di genere 9. Lo strumento principale utilizzato è la decomposizione della categoria derivata, data da Kuznetsov in [Kuz06]. Tale categoria contiene come fattore semiortogonale la categoria derivata di una curva liscia proiettiva Γ, rispettivamente di genere 7 e di genere 3. Sia φ la restrizione allo spazio di moduli $\mathsf{M}_X(2, c_1, c_2)$ della proiezione su tale fattore. Si ha allora il seguente

Teorema. *Sia X una varietà tridimensionale di Fano della serie principale di genere 7. Allora la mappa φ dà un isomorfismo fra $\mathsf{M}_X(2,1,6)$ e $W^1_{1,6}(\Gamma)$. In particolare tale spazio di moduli è liscio irriducibile di dimensione 3.*

Nel teorema precedente, $W^1_{1,6}(\Gamma)$ è la sottovarietà di $\mathrm{Pic}^6(\Gamma)$ dei fibrati in rette con almeno due sezioni linearmente indipendenti.

Il teorema precedente ha una versione birazionale anche per $c_2 \geq 7$. Si veda il teorema 4.1 per l'enunciato preciso. Lo stesso accade per il risultato successivo, (teorema 4.3 in forma precisa), relativo al genere 9:

Teorema. *Sia X una varietà tridimensionale di Fano della serie principale di genere 9. L'applicazione φ dà un isomorfismo fra $\mathsf{M}_X(2,1,7)$ e lo scoppiamento di $\mathrm{Pic}^2(\Gamma)$ lungo una curva isomorfa allo schema di Hilbert delle rette contenute in X.*

Tornando al genere 7, ma questa volta per fibrati con determinante pari, si ha:

Teorema. *Sia X una varietà tridimensionale di Fano della serie principale di genere 7 e sia $\mathsf{M}_\ell(4)$ l'insieme dei fasci localmente liberi contenuti in $\mathsf{M}_X(2,0,4)$. Allora φ dà un'immersione aperta di $\mathsf{M}_\ell(4)$ in $W^1_{2,4}(\Gamma)$. In particolare, lo spazio di moduli $\mathsf{M}_\ell(4)$ è una varietà liscia e irriducibile di dimensione 5.*

Qui, $W^1_{2,4}(\Gamma)$ è la varietà dei fibrati su Γ stabili di rango 2 e grado 4, che ammettono almeno 2 sezioni linearmente indipendenti.

Infine, nel caso di 3-varietà di genere 12, la categoria derivata ammette un sistema di 4 generatori eccezionali, si veda [Fae07]. Da ciò si evince una descrizione - si veda il teorema 4.5 - di un aperto di $\mathsf{M}_X(2,1,c_2)$ per $c_2 \geq 8$. Quest'ultima si può svolgere in termini di monadi, in maniera del tutto analoga alla teoria delle monadi in $\mathbb{P}^3$, si veda [BH78].

1.1. **Fasci aCM.** Sia $\mathbf{k}$ un campo algebricamente chiuso, e si consideri uno schema proiettivo X equidimensionale definito su $\mathbf{k}$, munito di un fascio invertibile molto ampio $\mathscr{O}_X(1)$. Si ha dunque $X \subset \mathbb{P}^N = \mathbb{P}^N_{\mathbf{k}}$, ed è definito l'ideale saturato I_X di X in $\mathbb{P}^N$. Si tratta di un ideale dell'anello di polinomi $R = \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_N]$; il quoziente $R_X = R/I_X$ è detto anello coordinato di X.

Denoteremo con $\mathscr{I}_{Z,X}$ (rispettivamente $\mathscr{N}_{Z,X}$) il fascio di ideali (il fascio normale) di una sottovarietà $Z \subset X$. Utilizzeremo i gruppi di coomologia di Čech di un fascio $\mathscr{F}$ su X, denotati con $\mathrm{H}^k(X, \mathscr{F})$, nonché gli R_X-moduli di coomologia (o di Hartshorne-Rao):

$$\mathrm{H}^k_*(\mathscr{F}) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \mathrm{H}^k(X, \mathscr{F}(t)).$$

Definizione 1.1. Uno schema X è detto *aritmeticamente Cohen-Macaulay (aCM)* se R_X è un anello di Cohen-Macaulay. Questo è equivalente a $\mathrm{H}^1_*(\mathscr{I}_X) = 0$ e $\mathrm{H}^k_*(\mathscr{O}_X) = 0$ per $0 < k < \dim(X)$.

Dato uno schema aCM X, e un fascio $\mathscr{F}$ su X, si dice che $\mathscr{F}$ è *localmente Cohen-Macaulay (CM)* se, per ogni $x \in X$, si ha che la profondità di $\mathscr{F}_x$ è uguale alla dimensione di $\mathscr{O}_x$.

Dato un fascio $\mathscr{F}$ localmente CM, si dice che $\mathscr{F}$ è *aritmeticamente Cohen-Macaulay (aCM)* se $\mathscr{F}$ è *senza coomologia intermedia*, ovvero:

$$\mathrm{H}^k_*(\mathscr{F}) = 0, \qquad \text{per } 0 < k < \dim(X). \tag{1.1}$$

Queste definizioni si possono ritrovare in [CDH05], mentre in [CH04, Proposition 2.1] si osserva che la corrispondenza $\mathscr{F} \mapsto \mathrm{H}^0_*(\mathscr{F})$ dà una biiezione fra i fasci aCM su X e i moduli di Cohen-Macaulay massimali sull'anello R_X, il cui inverso è il funtore di fascificazione $E \mapsto E^{\tilde{}}$, vedi [Har77].

Si supponga ora che la varietà X sia liscia. Si osservi che, nel caso in cui il fascio $\mathscr{F}$ sia localmente libero (dunque un fibrato vettoriale), $\mathscr{F}$ è aCM se e solo se vale la condizione coomologica (1.1).

2. Osservazioni sulle varietà tridimensionali di Fano

Cominciamo con il definire le varietà in oggetto. La definizione che segue non è completamente standard, nel senso che supponiamo fin da principio che la varietà X sia liscia.

Definizione 2.1. Una varietà proiettiva tridimensionale liscia X è detta *di Fano* se il divisore anticanonico $-K_X = c_1(\mathscr{T}_X)$ è ampio. Quando $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z} = \langle H_X \rangle$, con H_X ampio, tali varietà sono state chiamate da Fano *di prima specie*. In tal caso possiamo scrivere $-K_X = i_X H_X$ e l'intero positivo i_X è detto *indice* di X. Una varietà X di Fano di prima specie e di indice 1 è detta *della serie principale* (o non iperellittica) quando $-K_X$ è *molto ampio*. Data una 3-varietà di Fano X della serie principale, si definisce il *genere* g di X come l'intero tale che $H_X^3 = 2\,g - 2$. Si ha $3 \leq g \leq 10$ oppure $g = 12$.

Una superficie liscia S è detta K3 se ha divisore canonico banale e irregolarità zero. Si dice che S ha *genere* g se $\mathrm{Pic}(S) \cong \mathbb{Z} = \langle H_S \rangle$, e $H_S^2 = 2\,g - 2$, dove H_S è un divisore ampio. La sezione iperpiana generica di una 3-varietà di Fano della serie principale di genere g è una superficie K3 di genere g.

Diremo inoltre che una 3-varietà di Fano della serie principale X di genere g è *ordinaria* se esiste una retta $L \subset X$ il cui fibrato normale $\mathscr{N}_L$ si decompone come $\mathscr{O}_L \oplus \mathscr{O}_L(-1)$. D'altra parte, X è detta *esotica* se la retta generica di una componente dello schema di Hilbert delle rette di X ha fibrato normale $\mathscr{O}_L(1) \oplus \mathscr{O}_L(-2)$. È noto che una 3-varietà di Fano della serie principale di genere g *generica* è ordinaria. Per $g \geq 9$, è noto da [GLN06] e [Pro90] che la varietà X è ordinaria a meno che essa sia isomorfa alla varietà di Mukai-Umemura di genere 12, si veda [MU83].

Le classi di deformazione delle 3-varietà di Fano della serie principale di genere g sono state classificate da Iskovskih in [Isk77], [Isk78], si veda anche l'opera [IP99] interamente dedicata alle varietà di Fano. Successivamente, un diverso approccio per la classificazione (il metodo del fibrato), è stato proposto da Mukai si veda ad esempio [Muk88], [Muk89], [Muk95].

Da ora in poi utilizzeremo le notazioni che seguono. Data una varietà liscia proiettiva Y con $\mathrm{Pic}(Y) \cong \mathbb{Z} = \langle H_Y \rangle$, e H_Y ampio, scriviamo $\mathsf{M}_Y(r, c_1, \ldots, c_r)$ per lo spazio di moduli di classi di S-equivalenza di fasci di rango r, Gieseker H_Y-semistabili con classi di Chern $c_1, \ldots, c_r$. Ovunque questo non dia adito a confusione, denoteremo le classi c_i con degli interi. La pendenza di un fascio F è definita come $\mu(F) = c_1(F)/\mathrm{rk}(F)$. Diremo che F

è *normalizzato* se $-1 < \mu(F) \leq 0$. Lo spazio di moduli di fasci μ-semistabili sarà denotato con $\mathsf{M}^{\mu}_{Y}(r, c_1, \ldots, c_r)$. Rimandiamo a [HL97] per le definizioni e le proprietà dei fasci semistabili, e per la costruzione degli spazi di moduli in questione.

Denoteremo con $\mathscr{H}^{g}_{d}(Y)$ l'unione delle componenti dello schema di Hilbert dei sottoschemi di Y che contengono curve proiettive di genere aritmetico g e grado d.

Ricordiamo, infine, che se F è un fascio stabile di rango r su una superficie K3 S di genere g, con $c_1(F) = c_1$ e $c_2(F) = c_2$, la dimensione nel punto $[F]$ dello spazio di moduli $\mathsf{M}_S(r, c_1, c_2)$ è:

$$2\, r\, c_2 - (r-1)(2\, g - 2)\, c_1^2 - 2\,(r^2 - 1). \tag{2.1}$$

2.1. **Fibrati con seconda classe di Chern minima.** Assumiamo che X sia una 3-varietà di Fano della serie principale di genere g ordinaria.

Lemma 2.2. *Sia X come sopra, e si ponga:*

$$m_g = \left\lceil \frac{g+2}{2} \right\rceil. \tag{2.2}$$

i) Lo spazio di moduli $\mathsf{M}_X(2, 1, d)$ è vuoto per $d < m_g$.
ii) Se $g \geq 6$, ogni fascio in $\mathsf{M}_X(2, 1, m_g)$ è un fibrato stabile aCM, globalmente generato. In particolare si ha $\mathrm{h}^0(X, F) = g - m_g + 3$.
iii) Se $g \geq 6$, lo spazio di moduli $\mathsf{M}_X(2, 1, m_g)$ è fine, e per ogni F in $\mathsf{M}_X(2, 1, m_g)$ valgono:

$$\mathrm{Ext}^2_X(F, F) = 0, \tag{2.3}$$
$$F \otimes \mathscr{O}_L \cong \mathscr{O}_L \oplus \mathscr{O}_L(1), \tag{2.4}$$
$$\mathrm{h}^0(X, F) = g - m_g + 3, \tag{2.5}$$

dove $L \subset X$ è una retta generica.

Lo spazio $\mathsf{M}_X(2, 1, m_g)$ è ridotto a un punto se g è pari, isomorfo ad una curva proiettiva liscia e irriducibile se g è pari.
iv) Se $g \leq 5$, allora $\mathsf{M}_X(2, 1, m_g)$ contiene un fibrato aCM tale che valgano (2.3), (2.4) e (2.5).

Per la dimostrazione, si veda [BF07a, Lemma 3.1], per il punto (i) [BF08a, Sezione 3.1] per (ii), (iii) e (iv). Va notato che la dimostrazione del fatto che $\mathsf{M}_X(2, 1, m_g)$ sia non vuoto poggia su un'analisi caso per caso.

La condizione (2.3) implica che $\mathsf{M}_X(2, 1, m_g)$ è liscio in $[F]$, perciò diremo che $[F]$ è *non ostruito* se soddisfa (2.3). Analogamente diremo che una curva C in X di genere e e grado d è *non ostruita* se lo schema di Hilbert $\mathscr{H}^{e}_{d}$ è liscio in $[C]$. Possiamo riassumere le informazioni riguardanti $\mathsf{M}_X(2, 1, m_g)$ nella seguente tabella. Qui F è un fascio in $\mathsf{M}_X(2, 1, m_g)$.

g	H_X^3	m_g	$\mathrm{h}^0(X,F)$	F g.g.	$\mathsf{M}_X(2,1,m_g)$ irrid.?	$\chi(F,F)$
3	4	3	3	$\nexists$	Non noto	0
4	6	3	4	$\exists$	No	1
5	8	4	4	$\exists$	Non noto	0
6	10	4	5	$\forall$	Sì	1
7	12	5	5	$\forall$	Sì	0
8	14	5	6	$\forall$	Sì	1
9	16	6	6	$\forall$	Sì	0
10	18	6	7	$\forall$	Sì	1
12	22	7	8	$\forall$	Sì	1

3. Fibrati senza coomologia intermedia (aCM) di rango 2

3.1. **La classificazione degli invarianti dei 2-fibrati aCM.** Ricordiamo ora la lista data da Madonna dei possibili valori di c_1 e c_2 per un fibrato F di rango 2 (diremo anche *2-fibrato*) aCM su una 3-varietà di Fano della serie principale di genere g.

Proposizione 3.1 (Madonna)**.** *Sia X come sopra, e sia F un 2-fibrato normalizzato aCM su X con $c_i(F) = c_i$. Allora c_1 e c_2 soddisfano:*

$$c_1 = 0 \Rightarrow c_2 \in \{2,4\},$$
$$c_1 = -1 \Rightarrow c_2 \in \{1,\dots,g+3\}.$$

Inoltre il più piccolo intero t_0 tale che $\mathrm{H}^0(X,F(t_0)) \neq 0$ soddisfa:

a) se $(c_1,c_2) = (-1,1)$, allora $t_0 = 0$,
b) se $(c_1,c_2) = (0,2)$, allora $t_0 = 0$,
c) se $(c_1,c_2) = (-1,c_2)$, con $2 \leq c_2 \leq g+2$, allora $t_0 = 1$,
d) se $(c_1,c_2) = (0,4)$, allora $t_0 = 1$,
e) se $(c_1,c_2) = (-1,g+3)$, allora $t_0 = 2$.

Dunque F è μ-stabile eccetto che in (a) *e* (b)*.*

Osservazione 3.2. In diversi casi (in particolare nei numeri (a) e (b)) è nota anche l'esistenza di 2-fibrati aCM con tali invarianti.

3.2. **Fibrati aCM con determinante dispari.** Qui verranno riassunti i passi necessari per dimostrare l'esistenza di tutti i fibrati previsti dalla lista di Madonna, una volta introdotta l'ulteriore restrizione $c_2 \geq m_g$ nel caso (c). Lavoreremo solo nel caso di 3-varietà di Fano della serie principale ordinarie.

Teorema 3.3. *Sia X una 3-varietà di Fano della serie principale ordinaria di genere g. Allora esistono fibrati aCM F di rango 2 con $c_1(F) = 1$ e $c_2(F) = d$ per $m_g \leq d \leq g+3$.*

Dimostrazione. Diamo solo uno schema della dimostrazione, che appare in forma completa in [BF08a]. Si procede per induzione rispetto a $c_2(F)$.

Passo 1. Ricordiamo che, per il lemma 2.2, esiste un fibrato aCM F_{m_g} con $c_2(F_{m_g}) = m_g$. Inoltre tale fibrato è non ostruito e si spezza come $\mathscr{O}_L \oplus \mathscr{O}_L(1)$ su una retta generica $L \subset X$ (che ha normale $\mathscr{N}_L \cong \mathscr{O}_L \oplus \mathscr{O}_L(-1)$).

Passo 2. Per induzione, si suppone che esista un 2-fibrato aCM F_{d-1} con $c_2(F_{d-1}) = d-1$ e con le proprietà elencate al passo 1. Si definisce quindi un fascio F_d come nucleo della successione esatta:

$$0 \to F_d \to F_{d-1} \xrightarrow{\sigma} \mathscr{O}_L \to 0. \tag{3.1}$$

Passo 3. Si dimostra che una deformazione generica F di F_d è un fibrato che soddisfa le proprietà elencate al passo 1 e con $c_2(F) = d$.

Questo dunque definisce - una volta scelta una componente $\mathsf{M}(m_g)$ di $\mathsf{M}_X(2,1,m_g)$ - per ogni $d \geq m_g$, una componente $\mathsf{M}(d)$ di $\mathsf{M}_X(2,1,d)$, ridotta e di dimensione:

$$\dim(\mathsf{M}(d)) = 2\,d - g - 2.$$

È definito anche il divisore $\mathsf{N}(d)$ in $\mathsf{M}(d)$ che consiste nell'insieme dei fasci che sono nucleo di (3.1), con $[F_{d-1}] \in \mathsf{M}(d)$.

Data una sezione s di un generico F in $\mathsf{M}(m_g)$, si ottiene, come luogo degli zeri di s, una curva liscia non ostruita C_{m_g}. Per $d \geq m_g + 1$, consideriamo allora i sottoinsiemi $\mathscr{K}^1_d$, $\mathscr{L}^1_d$ di $\mathscr{H}^1_d(X)$ definiti da:

$$\mathscr{K}^1_{m_g} = \text{la componente di } \mathscr{H}^1_{m_g}(X) \text{ che contiene } [C_{m_g}], \tag{3.2}$$

$$\mathscr{L}^1_d = \{[C \cup L] \mid \operatorname{len}(C \cap L) = 1, [C] \in \mathscr{K}^1_{d-1}, L \in \mathscr{H}^0_1(X)\}, \tag{3.3}$$

$$\mathscr{K}^1_d = \text{la componente di } \mathscr{H}^1_d(X) \text{ che contiene } \mathscr{L}^1_d. \tag{3.4}$$

Passo 4. Si mostra che il generico elemento F della componente $\mathsf{M}(d)$ (costruita al passo precedente), per $m_g \leq d \leq g+2$, soddisfa:

$$\mathrm{h}^0(X,F) = \max(g+3-d, 0), \qquad \mathrm{h}^1(X,F) = 0.$$

Passo 5. Si mostra che dato F generico in $\mathsf{M}(d-1)$, esiste una sezione s di F che si annulla su una curva ellittica C in $\mathscr{K}^1_{d-1}$ che interseca una generica retta L in un singolo punto e tale che:

$$\mathrm{h}^0(X, J_{C\cup L}(1)) = \mathrm{h}^0(X, J_C(1)) - 1.$$

Si noti che, per induzione, nel passo precedente la curva C può essere scelta liscia irriducibile e proiettivamente normale. Inoltre la curva $C \cup L$ appartiene all'insieme $\mathscr{L}^1_d$ ed è una sezione di F_d, con $[F_d] \in \mathsf{N}(d)$.

Passo 6. Si osserva che una sezione di una generica deformazione F di F_d dà una generica deformazione D di $C \cup L$. Si mostra che D è una curva ellittica liscia proiettivamente normale. Quindi se ne deduce che F è aCM.

□

Di particolare interesse risulta il caso $c_2 = g+3$.

Proposizione 3.4. *Un elemento generico di* $\mathsf{M}(g+3)$ *è un fibrato aCM* F *tale che una sezione generica di* $F(1)$ *si annulla su una curva liscia irriducibile* C *di genere* $5\,g$*, e si ha* $\omega_C \cong \mathscr{O}_C(2)$*, dove* ω_C *è il fascio canonico della curva.*

3.3. **Fibrati aCM con determinante pari.** Sia ancora X una 3-varietà di Fano della serie principale. Per completare la dimostrazione dell'esistenza di tutti i fibrati della lista, dobbiamo considerare ancora il caso (d). Diamo prima il seguente risultato preliminare.

Proposizione 3.5. *Lo spazio di moduli $\mathsf{M}_X(2,0,2)$ è vuoto. Lo spazio $\mathsf{M}^{\mu}_X(2,0,2)$ è in biiezione con lo schema di Hilbert $\mathscr{H}^0_2(X)$ delle coniche contenute in X. Ogni S-classe in $\mathsf{M}^{\mu}_X(2,0,2)$ contiene un fibrato F^C che si può scrivere in una successione esatta della forma:*

$$0 \to \mathscr{O}_X \to F^C \to J_C \to 0, \tag{3.5}$$

per una certa conica C in $\mathscr{H}^0_2(X)$.

Il risultato principale è il seguente teorema.

Teorema 3.6. *Sia X una 3-varietà di Fano della serie principale. Allora esiste un 2-fibrato aCM stabile F con $c_1(F) = 0$, $c_2(F) = 4$.*

Dimostrazione. Diamo soltanto una descrizione dei passi necessari per dimostrare questo risultato, rimandando a [BF08a] per il ragionamento completo.

Passo 1. Si considerano due coniche lisce disgiunte C e D contenute in X, entrambe con fibrato normale banale, e si definisce un fascio F_2 come estensione non banale:

$$0 \to J_C \to F_2 \to J_D \to 0. \tag{3.6}$$

Si noti che esistono C e D come nel passo precedente (si veda [Isk78] o [IM06] per una sintesi).

Si considera poi lo spazio di moduli $\mathsf{Spl}_X(2,0,4)$ dei fasci semplici F con $c_1(F) = 0$, $c_2(F) = 4$, $c_3(F) = 0$ (si veda ad esempio [AK80]).

Passo 2. Si mostra che il fascio F_2 è semplice, e che $\mathsf{Spl}_X(2,0,4)$ ha dimensione 5 nel punto $[F_2]$. Lo spazio dei fasci che si possono collocare come termine al centro in un'estensione del tipo (3.6) ha invece dimensione 4.

Passo 3. Si considera un fascio F che sia una generica deformazione di $[F_2]$ in $\mathsf{Spl}_X(2,0,4)$, e si dimostra che F è localmente libero.

Passo 4. Si osserva che F_2 soddisfa $\mathrm{H}^1(X, F_2(t)) = 0$ per ogni t. Per semicontinuità, lo stesso vale per F, che risulta dunque essere aCM grazie alla dualità di Serre.

□

Osservazione 3.7. La tecnica utilizzata nel precedente teorema permette di dimostrare che, se X è come sopra, data una conica generica in $C \subset X$, e un punto $x \in C$, per ogni $d \geq 2$ esiste un fibrato di rango 2 stabile F_d con $c_1(F_d) = 0$, $c_2(F_d) = 2d$, e:

$$\mathrm{Ext}^2_X(F_d, F_d) = 0, \tag{3.7}$$

$$\mathrm{H}^0(C, F_d(-x)) = 0, \tag{3.8}$$

$$\mathrm{H}^1(X, F_d(-1)) = 0. \tag{3.9}$$

Si noti che per $d \geq 3$ il fibrato F_d non è aCM. Ad ogni modo si ottiene una componente genericamente liscia dello spazio di moduli $\mathsf{M}_X(2,0,2d)$ di dimensione $4\,d-3$.

4. Fibrati stabili con rango 2 e $c_1 = 1$

In questo paragrafo studieremo gli spazi di moduli di fasci stabili di rango (generico) 2, con determinante dispari. Possiamo assumere, dunque, a meno di twist con fibrati in rette, che la prima classe di Chern sia uguale a 1.

Il quadro generale è il seguente. Sia X una varietà tridimensionale liscia proiettiva su $\mathbf{k}$ tale che $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z} = \langle H_X \rangle$, con H_X ampio e $K_X \cong -i_X H_X$ con i_X intero positivo.

Si consideri un 2-fibrato stabile E su X tale che:

$$E \cong E^* \otimes \mathscr{O}_X(K_X), \tag{4.1}$$

$$\mathrm{H}^1(X,E) = 0. \tag{4.2}$$

Si vuole studiare lo spazio di moduli $\mathscr{M}_X(c_2)$ di 2-fibrati stabili che soddisfano (4.1) e (4.2), come sottospazio di $\mathsf{M}_X(2,1,c_2)$.

Nel caso $i_X = 4$, questo equivale a studiare lo spazio di moduli dei fibrati istantoni su $\mathbb{P}^3$, si veda [AHDM78].

Noi ci interesseremo invece al caso $i_X = 1$, cioè alle 3-varietà di Fano della serie principale. In alcuni casi riusciremo a studiare tutto il compatto $\mathsf{M}_X(2,1,c_2)$, in altri soltanto l'aperto $\mathscr{M}_X(c_2)$, in altri ancora un sottoinsieme aperto di $\mathscr{M}_X(c_2)$.

4.1. **Preliminari: luoghi di Brill-Noether.**
Sia Γ una curva proiettiva liscia di genere g. La varietà di Brill-Noether $W^s_{r,c}(\Gamma)$ è definita come lo spazio di moduli dei fibrati stabili di rango r e grado c su Γ che possiedono almeno $s+1$ sezioni globali linearmente indipendenti. La sua dimensione attesa è:

$$\rho(g,r,c,s) = (g-1)\,r^2 - (s+1)\,(s+1-c+(g-1)\,r) + 1, \tag{4.3}$$

si veda [TiB91a].

Ricordiamo anche la mappa di Gieseker-Petri, definita come l'applicazione naturale:

$$\pi_{\mathcal{F}} : \mathrm{H}^0(\Gamma,\mathcal{F}) \otimes \mathrm{H}^0(\Gamma,\mathcal{F}^* \otimes \omega_\Gamma) \to \mathrm{H}^0(\Gamma,\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^* \otimes \omega_\Gamma). \tag{4.4}$$

La mappa $\pi_{\mathcal{F}}$ è iniettiva se e solo se $[\mathcal{F}]$ è un punto liscio di una componente di $W^s_{r,d}(\Gamma)$ di dimensione $\rho(g,r,d,s)$. La trasposta di $\pi_{\mathcal{F}}$ ha la forma:

$$\pi_{\mathcal{F}}^{\top} : \mathrm{Ext}^1_\Gamma(\mathcal{F},\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^0(\Gamma,\mathcal{F})^* \otimes \mathrm{H}^1(\Gamma,\mathcal{F}). \tag{4.5}$$

4.2. **Fibrati di rango 2 su 3-varietà di Fano di genere 7.**
Sia X una varietà tridimensionale di Fano della serie principale di genere 7 ordinaria. Gli spazi di moduli $\mathscr{M}_X(c_2)$ sono esprimibili come luoghi di Brill Noether su una curva proiettiva Γ. Per spiegare in che modo, è necessario richiamare alcune nozioni sulla geometria di X.

4.2.1. *Cenni sulle 3-varietà di Fano di genere 7.* Una spiegazione dettagliata della descrizione data da Mukai di una varietà di Fano della serie principale di genere 7 si può trovare ad esempio in [IM04a], [Kuz05], [IM04b], nonché nei lavori ivi citati.

La varietà X è ottenuta come sezione lineare della varietà spinoriale di dimensione 10 Σ^+, immersa in modo equivariante minimale. A tale sezione corrisponde una sezione lineare ortogonale $\Gamma \subset \Sigma^-$, che risulta essere una curva liscia proiettiva di genere 7. La curva Γ si identifica con lo spazio $\mathsf{M}_X(2,1,5)$, e si denota con $\mathscr{E}$ il fibrato universale su $X \times \Gamma$.

Denotiamo con $\mathcal{U}_X$ il sottofibrato universale di rango 5 ottenuto come restrizione via l'immersione naturale $X \hookrightarrow \Sigma^+ \hookrightarrow \mathbb{G}(5,10)$. Ricordiamo che $\mathcal{U}_X$ è stabile, aCM ed eccezionale.

Kuznetsov, in [Kuz05], trova la seguente decomposizione semiortogonale della categoria derivata $\mathbf{D^b}(X)$:

$$\mathbf{D^b}(X) \cong \langle \mathscr{O}_X, \mathcal{U}_X^*, \mathbf{\Phi}(\mathbf{D^b}(\Gamma))\rangle, \tag{4.6}$$

dove $\mathbf{\Phi}$ è il funtore integrale associato ad $\mathscr{E}$, munito di funtori aggiunti destro $\mathbf{\Phi}^!$ e sinistro $\mathbf{\Phi}^*$. Si ha:

$$\mathbf{\Phi} : \mathbf{D^b}(\Gamma) \to \mathbf{D^b}(X), \qquad \mathbf{\Phi}(-) = \mathbf{R}p_*(q^*(-) \otimes \mathscr{E}), \tag{4.7}$$

$$\mathbf{\Phi}^! : \mathbf{D^b}(X) \to \mathbf{D^b}(\Gamma), \qquad \mathbf{\Phi}^!(-) = \mathbf{R}q_*(p^*(-) \otimes \mathscr{E}^*(\omega_\Gamma))[1], \tag{4.8}$$

$$\mathbf{\Phi}^* : \mathbf{D^b}(X) \to \mathbf{D^b}(\Gamma), \qquad \mathbf{\Phi}^*(-) = \mathbf{R}q_*(p^*(-) \otimes \mathscr{E}^*(-H_X))[3]. \tag{4.9}$$

L'utilità di una tale decomposizione, per lo studio di spazi di moduli di fibrati, è il seguente. Dai risultati generali in [Gor90], dato un fascio F su X, la decomposizione (4.6) induce un triangolo esatto funtoriale:

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}^!(F)) \to F \to \mathbf{\Psi}(\mathbf{\Psi}^*(F)), \tag{4.10}$$

dove $\mathbf{\Psi}$ è l'inclusione naturale della sottocategoria $\langle \mathscr{O}_X, \mathcal{U}_+^* \rangle$ in $\mathbf{D^b}(X)$ e $\mathbf{\Psi}^*$ è l'aggiunto sinistro a $\mathbf{\Psi}$. Il termine k-esimo del complesso $\mathbf{\Psi}(\mathbf{\Psi}^*(F))$ può essere scritto come segue:

$$(\mathbf{\Psi}(\mathbf{\Psi}^*(F)))^k \cong \mathrm{Ext}_X^{-k}(F, \mathscr{O}_X)^* \otimes \mathscr{O}_X \oplus \mathrm{Ext}_X^{1-k}(F, \mathcal{U}_X)^* \otimes \mathcal{U}_X^*. \tag{4.11}$$

4.2.2. *Spazi di moduli di fasci stabili per $g = 7$.* Qui si darà una sintesi dei principali teoremi contenuti in [BF07a].

Teorema 4.1. *Sia X una varietà di Fano della serie principale di genere 7 generica. Allora la mappa $\varphi : F \mapsto \mathbf{\Phi}^!(F)$ dà:*

A) per ogni $d \geq 7$, una mappa birazionale fra $\mathsf{M}(d)$ e una componente genericamente liscia di dimensione $(2d-9)$ di $W^{2d-11}_{d-5, 5d-24}(\Gamma)$.

B) un isomorfismo fra $\mathsf{M}_X(2,1,6)$ e $W^1_{1,6}(\Gamma)$. In particolare tale spazio è liscio irriducibile di dimensione 3.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo risultato costituisce la parte più importante dell'articolo [BF07a]. Ne diamo qui un breve schema.

Passo 1. Si considera F in $\mathsf{M}_X(2,1,d)$ con $\mathrm{H}^1(X, F(-1)) = 0$. Utilizzando la definizione del funtore $\mathbf{\Phi}^!$ e la stabilità dei fasci in gioco, si mostra che $\mathcal{F} = \mathbf{\Phi}^!(F)$ è un fibrato su Γ che soddisfa:

$$\mathrm{rk}(\mathcal{F}) = d - 5, \qquad \deg(\mathcal{F}) = 5\,d - 24. \tag{4.12}$$

Passo 2. Si dimostra che, dato F come sopra, si ha una risoluzione naturale:

$$0 \to \mathrm{Ext}^2_X(F,\mathcal{U}_X)^* \otimes \mathcal{U}_X^* \xrightarrow{\zeta_F} \mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}^!(F)) \to F \to 0, \tag{4.13}$$

con $\mathrm{ext}^2_X(F,\mathcal{U}_X) = 2d - 10$. A questo scopo è sufficiente fare uso della stabilità dei fasci F e $\mathcal{U}_X$ e di (4.11) per mostrare:

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{\Psi}^*(F)) \cong \mathrm{Ext}^2_X(F,\mathcal{U}_X)^* \otimes \mathcal{U}_X^*[1].$$

Dalla coomologia di (4.10) segue allora la risoluzione (4.13)

Passo 3. Si osserva che, per ogni F come sopra, si ha $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{U}_X^*, F) = 0$. Da questo segue che ζ_F è univocamente determinata da $\mathcal{F}$ e ciò implica che l'associazione $F \mapsto \mathbf{\Phi}^!(F)$ è iniettiva.

Passo 4. Per ogni $d \geq 7$, la tecnica del teorema 3.3 dimostra che esiste un aperto di Zariski $\Omega(d)$ di una componente di $\mathsf{M}_X(2,1,d)$, tale che ogni punto F_d di $\Omega(d)$ soddisfa $\mathrm{H}^1(X, F_d(-1)) = 0$, e inoltre $\mathbf{\Phi}^!(F_d)$ è stabile.

Passo 5. Studiando la mappa di Petri, si dimostra che $\mathrm{Ext}^1_X(F,F)$ è identificato naturalmente con il nucleo di $\pi^{\top}_{[\mathcal{F}]}$, ovvero con lo spazio tangente $T_{[\mathcal{F}]}W^{2\,d-11}_{d-5,5\,d-24}(\Gamma)$. Questo mostra che φ è un isomorfismo locale.

Passo 6. La dimostrazione della parte A a questo punto è terminata. Per concludere la dimostrazione della parte B, bisogna osservare che nel caso $d = 7$, tutte le condizioni aperte appena viste valgono in generale. In particolare, la stabilità di $\mathcal{F}$ è ovvia in quanto tale fibrato ha rango 1. La proprietà $\mathrm{H}^1(X, F(-1)) = 0$ segue invece dalla seguente osservazione.

Osservazione 4.2. Sia Y una 3-varietà di Fano della serie principale di genere $g \geq 6$, e F un fascio in $\mathsf{M}_X(2,1,m_g+1)$. Allora si ha:

$$\mathrm{H}^k(X,F) = \mathrm{H}^k(X,F(-1)) = 0, \qquad \text{per } k = 1,2.$$

□

4.3. **Fibrati di rango 2 su 3-varietà di Fano di genere 9.** Sia X una varietà tridimensionale di Fano della serie principale di genere 9. Si ricordi che essa è sempre ordinaria, grazie a [GLN06]. Dunque gli spazi di moduli $\mathscr{M}_X(c_2)$ sono non vuoti per $c_2 \geq m_g = 6$. Per darne un quadro preciso, introdurremo dei luoghi di Brill-Noether di tipo II su una curva proiettiva liscia Γ. Ricordiamo innanzi tutto alcune osservazioni sulla geometria di X.

4.3.1. *Cenni sulle 3-varietà di Fano di genere 9.* Una descrizione dettagliata della geometria delle varietà tridimensionali di Fano della serie principale di genere 9, così come sono note dai risultati di Mukai, nonché della $\mathsf{Sp}(3)$-geometria ad esse correlata, è reperibile nei lavori [Muk88], [Muk89], [Ili03], [IR05].

La varietà X è ottenuta come sezione lineare della varietà lagrangiana Σ di dimensione 6, immersa in modo equivariante minimale in $\mathbb{P}^{13}$. Allo spazio lineare corrispondente ad X si associa uno spazio ortogonale in $\check{\mathbb{P}}^{13}$, che taglia l'orbita data dalla ipersuperficie Pfaffiana in una quartica liscia Γ. La curva Γ è identificata in modo naturale con lo spazio $\mathsf{M}_X(2,1,6)$, ed esiste un fibrato universale $\mathscr{E}$ su $X \times \Gamma$.

Si ha inoltre il sottofibrato universale $\mathcal{U}_X$ su X di rango 3 dato dalla restrizione via l'immersione naturale $X \hookrightarrow \Sigma \hookrightarrow \mathbb{G}(3,6)$. Ricordiamo che $\mathcal{U}_X$ è stabile, aCM ed eccezionale.

Kuznetsov, in [Kuz06], dà la seguente decomposizione della categoria derivata $\mathbf{D^b}(X)$:

$$\mathbf{D^b}(X) \cong \langle \mathscr{O}_X, \mathcal{U}_X^*, \mathbf{\Phi}(\mathbf{D^b}(\Gamma)) \rangle, \tag{4.14}$$

dove $\mathbf{\Phi}$ è il funtore integrale associato ad $\mathscr{E}$, munito di funtori aggiunti destro $\mathbf{\Phi}^!$ e sinistro $\mathbf{\Phi}^*$.

4.3.2. *Spazi di moduli di fasci stabili per $g = 9$.* Il risultato che si intende riassumere in questo paragrafo è il teorema principale di [BF08c].

Teorema 4.3. *Sia X una varietà di Fano della serie principale di genere 9. L'applicazione $\varphi : F \mapsto \mathbf{\Phi}^!(F)$ dà:*

A) per ogni $d \geq 8$, una mappa birazionale fra $\mathsf{M}(d)$ e una componente genericamente liscia di dimensione $(2d - 11)$ della varietà:

$$\{\mathcal{F} \in \mathsf{M}_\Gamma(d-6, d-5) \,|\, \mathrm{h}^0(\Gamma, \mathcal{V} \otimes \mathcal{F}) \geq d-6\}; \tag{4.15}$$

B) un isomorfismo fra $\mathsf{M}_X(2,1,7)$ e lo scoppiamento di $\mathrm{Pic}^2(\Gamma)$ lungo una curva isomorfa a $\mathscr{H}_1^0(X)$. Il divisore eccezionale parametrizza i fasci in $\mathsf{M}_X(2,1,7)$ che non sono globalmente generati.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 4.1, ed appare in forma completa in [BF08c]. Segnaliamo solo le differenze con la dimostrazione del teorema 4.1.

- Si ha questa volta $\mathbf{\Phi}^*(\mathcal{U}_X^*) \cong \mathcal{V}^*$ fibrato di rango 2, al posto di $\mathbf{\Phi}^*(\mathcal{U}_X^*) \cong \mathscr{O}_\Gamma$. Da qui la necessità di introdurre il luogo di Brill-Noether di tipo II definito da (4.15).
- Nel caso $d = m_g + 1 = 7$, risulta ancora che la mappa φ è definita ovunque (grazie all'osservazione 4.2), ma questa volta non è iniettiva. L'insieme $\mathsf{E}(7)$ dei fasci non globalmente generati è un divisore in $\mathsf{M}_X(2,1,7)$. Dato un fascio F in $\mathsf{M}_X(2,1,7)$ si hanno le seguenti condizioni equivalenti:
  i) F non è globalmente generato;
  ii) il gruppo $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{U}_X^*, F)$ è non banale;
  iii) esistono una retta $L \subset X$, un fascio stabile I di rango 2 con $c_1(I) = 1$, $c_2(I) = 8$ e $c_3(I) = 2$ e due successioni esatte:

$$0 \to \mathscr{O}_X \to \mathcal{U}_X^* \to I \to 0, \tag{4.16}$$

$$0 \to I \to F \to \mathscr{O}_L(-1) \to 0. \tag{4.17}$$

  Da ciò segue che il morfismo φ contrae $\mathsf{E}(7)$ sull'immagine dello schema di Hilbert $\mathscr{H}_1^0(X)$ per l'applicazione $\varphi : L \mapsto \mathbf{\Phi}^!(\mathscr{O}_L(-1))$.
- Si nota che il normale ad $[L]$ in $\mathrm{Pic}^2(\Gamma)$ si identifica in maniera naturale con lo spazio $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{U}_X, J_L)^*$. D'altronde l'insieme dei fasci G tali che $\varphi(G) = \varphi(F)$ si identifica con $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}_X(\mathcal{U}_X, J_L))$. Da ciò segue che φ è uno scoppiamento con centro $\varphi(\mathscr{H}_1^0(X))$ e divisore eccezionale $\mathsf{E}(7)$.

$\square$

4.4. **Genere 12.** Sia X una varietà di Fano della serie principale di genere 12 generica. Allora se ne può dare la seguente costruzione. Si considerino V e B spazi vettoriali di dimensione rispettivamente 7 e 3, e una rete di 2-forme alternanti $\sigma : \wedge^2 V \to B^*$. Si definisce allora:

$$X = \{\mathbb{C}^3 \subset V \mid \sigma^\top(b)(u \wedge v) = 0 \text{ per ogni } u, v \in \mathbb{C}^3, \text{ e per ogni } b \in B\},$$

dove si assume che σ sia sufficientemente generica. Denotiamo con $\mathcal{U}_X$ il sottofibrato universale di rango 3 su X, ottenuto come restrizione del sottofibrato universale sulla Grassmanniana $\mathbb{G}(3, V)$. Ricordiamo che $\mathcal{U}_X$ è stabile, eccezionale ed aCM.

Ricordiamo che su X è definito un fibrato eccezionale $\mathscr{S}_X$, ottenuto come restrizione del 2-fibrato naturale delle sizigie di una cubica gobba, via l'immersione di X nello spazio dei moduli delle cubiche gobbe. Si ha:

$$c_1(\mathscr{S}_X) = -1, \qquad c_2(\mathscr{S}_X) = 7, \qquad \mathrm{H}^1(X, \mathscr{S}_X) = 0.$$

Lemma 4.4. *Sia E un 2-fibrato in $\mathscr{M}_X(c_2)$. Allora $c_2 \geq 7$ ed E è la coomologia di una monade della forma:*

$$I' \otimes \mathcal{U}_X^*(-1) \xrightarrow{A'} W \otimes \mathscr{S}_X \xrightarrow{A} I \otimes \mathcal{U}_X,$$

ove I e W sono spazi vettoriali di dimensione rispettivamente $c_2 - 7$ e $3c_2 - 20$.

Dimostrazione. Diamo solo un cenno. Con la stessa tecnica del passo 2 nella dimostrazione del teorema 4.1, si dimostrano gli annullamenti appropriati rispetto alla seguente decomposizione della categoria derivata:

$$\mathbf{D^b}(X) \cong \langle \mathcal{U}_X^*(-1), \mathscr{S}_X, \mathcal{U}_X, \mathscr{O}_X \rangle.$$

Quest'ultima si ottiene facilmente con opportune mutazioni a partire dalla decomposizione descritta in [Fae07]. □

Si denoti con C lo spazio vettoriale quadridimensionale $\mathrm{Hom}_X(\mathscr{S}_X, \mathcal{U}_X^*)$.

Teorema 4.5. *Sia X una varietà di Fano della serie principale di genere* 12 *generica. Lo spazio di moduli $\mathscr{M}_X(c_2)$ è isomorfo al quoziente della varietà:*

$$\{A \in W^* \otimes I \otimes C \mid A \circ Q \circ A^\top = 0, \text{ e } A : W \otimes \mathscr{S}_X \to I \otimes \mathcal{U}_X^* \text{ suriettiva}\}$$

rispetto all'azione naturale del gruppo $\mathsf{Spin}_Q(W) \times \mathsf{GL}(I)$, dove I e W sono spazi vettoriali di dimensione rispettivamente $c_2 - 7$ e $3c_2 - 20$, mentre Q è una dualità simmetrica su X.

Dimostrazione. Diamo solo un cenno della dimostrazione. Data la risoluzione ottenuta tramite il lemma precedente, si ottiene una risoluzione analoga dualizzando e tensorizzando con $\mathscr{O}_X(-1)$:

$$I^* \otimes \mathcal{U}_X^*(-1) \xrightarrow{A^\top} W^* \otimes \mathscr{S}_X \xrightarrow{(A')^\top} (I')^* \otimes \mathcal{U}_X,$$

Ricordando che tali risoluzioni sono funtoriali, si ottiene che l'isomorfismo $F^* \cong F(-1)$, risale a un isomorfismo fra le due risoluzioni. Ne seguono gli isomorfismi naturali $I' \cong I^*$ e $W \cong W^*$, e l'uguaglianza sotto tali isomorfismi $A' = B \circ A^\top$. Inoltre, dato che l'isomorfismo $F^* \cong F(-1)$ è antisimmetrico, ne segue che anche il suo sollevamento $\tau : W \otimes \mathscr{S}_X \to W^* \otimes \mathscr{S}_X^*(-1)$ lo è. Ovvero si ha:

$$\tau \in \mathrm{H}^0(X, \wedge^2(W \otimes \mathscr{S}_X)^*(-1)) \cong \begin{array}{c} \wedge^2 W^* \otimes \mathrm{H}^0(X, \mathrm{Sym}^2 \mathscr{S}_X^*(-1)) \\ \oplus \\ \mathrm{Sym}^2 W^* \otimes \mathrm{H}^0(X, \wedge^2 \mathscr{S}_X^*(-1)) \end{array}$$

Ma $\mathrm{H}^0(X, \mathrm{Sym}^2 \mathscr{S}_X^*(-1)) = 0$, dunque $\tau = \mathrm{id}_{\mathscr{S}_X} \otimes Q$, dove $Q : W^* \to W$ è una dualità simmetrica. Da tale analisi segue facilmente l'enunciato. □

5. Fibrati stabili con rango 2 e $c_1 = 0$, $c_2 = 4$

Un risultato preliminare è la seguente classificazione dei fasci in $\mathsf{M}_X(2, 0, 4)$.

Proposizione 5.1. *Sia X una 3-varietà di Fano della serie principale di genere $g \geq 7$, e sia F in $\mathsf{M}_X(2, 0, 4)$. Allora F è stabile a meno che sia il termine al centro di una successione esatta del tipo* (3.6)*, con $[C], [D] \in \mathcal{H}_2^0(X)$.*

Se F è stabile, allora F è localmente libero a meno che non si possa scrivere in una delle successioni esatte:

$$0 \to J_C \to F \to J_L \to 0, \qquad \textit{con } [C] \in \mathcal{H}_3^0(X) \textit{ e } [L] \in \mathcal{H}_1^0(X), \tag{5.1}$$

$$0 \to J_C \to F \to J_x \to 0, \qquad \textit{con } [C] \in \mathcal{H}_4^0(X) \textit{ e } x \in C, \tag{5.2}$$

$$0 \to J_C \to F \to \mathscr{O}_X \to 0, \qquad \textit{con } [C] \in \mathcal{H}_4^{-1}(X), \tag{5.3}$$

5.1. **Lo spazio $\mathsf{M}_\ell(4)$ per genere 7.** Sia X una 3-varietà di Fano della serie principale di genere 7. Denotiamo con $\mathsf{M}_\ell(4)$ il sottoinsieme $\mathsf{M}_X(2, 0, 4)$ delle classi rappresentabili da un fascio localmente libero. Applicando il funtore $\mathbf{\Phi}^!$ allo spazio $\mathsf{M}_\ell(4)$, dimostreremo che esso dà un'immersione aperta in $W^1_{2,4}(\Gamma)$, ovvero un isomorfismo su un aperto di $W^1_{2,4}(\Gamma)$. Da risultati contenuti in [TiB91b], [Tan92], oppure da un teorema in [Mer01], è noto che quest'ultima varietà è liscia e irriducibile di dimensione 5.

Proposizione 5.2. *Siano X e $\mathsf{M}_\ell(4)$ come sopra. Dato F in $\mathsf{M}_\ell(4)$,*

i) allora $\mathbf{\Phi}^!(F(1))[-1]$ è un fibrato di rango 2 e grado 4 su Γ;

ii) vale:

$$\mathcal{H}^{-1}(\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^!(F(1))) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathcal{U}_X, F) \otimes \mathcal{U}_X^*, \tag{5.4}$$

$$\mathcal{H}^0(\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^!(F(1))) \cong F(1), \tag{5.5}$$

e $A_F = \mathrm{Hom}_X(\mathcal{U}_X, F)$ ha dimensione 2.

Dimostrazione. Diamo solo un'idea della dimostrazione, che si può trovare in [BF08b] in forma completa. In primo luogo, si dimostrano gli annullamenti di coomologia:

$$\mathrm{Ext}_X^{2-k}(F(1), E^*) = 0, \qquad \text{per } k = 0, 1, 2, \text{ e per ogni } E \text{ in } \mathsf{M}_X(2, 1, 5).$$

Per fare ciò si osserva che un eventuale elemento non nullo di tali gruppi di coomologia darebbe origine ad un fascio che si dimostrerebbe essere stabile, in virtù della stabilità di E e di F. Tale fascio, una volta ristretto a una generica sezione iperpiana $S \subset X$, risulterebbe ancora stabile. Tuttavia, le classi di Chern di un tale fascio sarebbero in contrasto con il fatto che la quantità (2.1) sia non negativa, conducendo dunque ad un assurdo.

Una volta dimostrati in tal modo gli annullamenti coomologici, si ha immediatamente la prima parte dell'enunciato.

Con una tecnica analoga si dimostrano, quindi, gli annullamenti:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ext}^k_X(F(1), \mathscr{O}_X) = 0, && \text{per ogni } k. \\ &\mathrm{Ext}^k_X(F(1), \mathcal{U}_X) = 0, && \text{per } k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Per Riemann-Roch e dualità di Serre ne segue l'uguaglianza: $\dim A_F = \hom_X(\mathcal{U}_X, F) = \mathrm{ext}^3_X(F(1), \mathcal{U}_X) = 2$. Si ha inoltre l'isomorfismo:

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{\Psi}^*(F)) \cong A_F \otimes \mathcal{U}^*_X[2].$$

Dunque, prendendo la coomologia del triangolo fornito da (4.10), si ottengono subito gli isomorfismi desiderati. □

Concludiamo con il teorema principale di questo paragrafo.

Teorema 5.3. *Sia X una 3-varietà di Fano di genere 7 e sia $\mathsf{M}_\ell(4)$ il sottoinsieme di $\mathsf{M}_X(2,0,4)$ costituito da fasci localmente liberi. La mappa:*

$$\varphi : \mathsf{M}_\ell(4) \to W^1_{2,4}(\Gamma); \quad \varphi(F) = \mathbf{\Phi}^!(F(1))[-1],$$

è un'immersione aperta. In particolare, lo spazio di moduli $\mathsf{M}_\ell(4)$ è una varietà irriducibile di dimensione 5.

Dimostrazione. Ancora una volta, rimandiamo per una dimostrazione completa a [BF08a]. Notiamo che la proposizione precedente già afferma che φ è iniettiva. Poniamo $\mathcal{F} = \mathbf{\Phi}^!(F(1))$ e osserviamo che i fatti da dimostrare sono i seguenti:

i) il fibrato $\mathcal{F}$ è stabile;
ii) la varietà $W^1_{2,4}(\Gamma)$ è liscia e irriducibile di dimensione 5.
iii) la mappa φ è un isomorfismo locale.

Il punto (i) si dimostra per assurdo, supponendo che esista un fibrato in rette $\mathcal{L}$, quoziente destabilizzante di $\mathcal{F}$. L'immagine tramite ϕ di $\mathcal{L}$ sarebbe dunque un quoziente di $F(1)$. Tale quoziente allora destabilizzerebbe F stesso (il che è impossibile per un fibrato in $\mathsf{M}_X(2,0,4)$), oppure sarebbe un fascio di rango maggiore di 2 (evidentemente assurdo).

Il punto (ii) discende da risultati non banali della teoria di Brill-Noether. Una sua dimostrazione è data in generale in [Mer01, Théorème 4].

La dimostrazione del punto (iii) consiste in un'analisi del morfismo di Petri, scritto nella forma (4.5). Per il punto precedente, tale morfismo risulta essere suriettivo e il suo nucleo si identifica in maniera naturale con lo spazio tangente $T_{[\mathcal{F}]}W^1_{2,4}(\Gamma)$. Se ne deduce un diagramma commutativo della forma:

$$\begin{tikzcd} T_{[\mathcal{F}]}W^1_{2,4}(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \mathrm{Ext}^1_\Gamma(\mathcal{F},\mathcal{F}) \arrow[r, "\pi^\top_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, equal] & A^*_F \otimes \mathrm{Ext}^1_\Gamma(\mathscr{O}_\Gamma,\mathcal{F}) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Ext}^1_X(F,F) \arrow[r] & A^*_F \otimes \mathrm{Hom}_X(\mathcal{U}^*_X, F(1)) \oplus \mathrm{Ext}^1_X(F,F) \arrow[r] & A^*_F \otimes \mathrm{Hom}_X(\mathcal{U}^*_+, F(1)). \end{tikzcd}$$

Tale diagramma permette di identificare in maniera naturale lo spazio vettoriale $T_{[\mathcal{F}]}W^1_{2,4}(\Gamma)$ con $\mathrm{Ext}^1_X(F,F)$, a sua volta canonicamente isomorfo allo spazio tangente $T_{[F]}\mathsf{M}_X(2,0,4)$. Dunque φ risulta un isomorfismo locale. □

Riferimenti bibliografici

[AK80] Allen B. Altman and Steven L. Kleiman, *Compactifying the Picard scheme*, Adv. in Math. **35** (1980), no. 1, 50–112.

[AC00] Enrique Arrondo and Laura Costa, *Vector bundles on Fano 3-folds without intermediate cohomology*, Comm. Algebra **28** (2000), no. 8, 3899–3911.

[AF06] Enrique Arrondo and Daniele Faenzi, *Vector bundles with no intermediate cohomology on Fano threefolds of type V_{22}*, Pacific J. Math. **225** (2006), no. 2, 201–220.

[AHDM78] Michael F. Atiyah, Nigel J. Hitchin, Vladimir G. Drinfel′d, and Yuri I. Manin, *Construction of instantons*, Phys. Lett. A **65** (1978), no. 3, 185–187.

[BH78] Wolf Barth and Klaus Hulek, *Monads and moduli of vector bundles*, Manuscripta Math. **25** (1978), no. 4, 323–347.

[BF07a] Maria Chiara Brambilla and Daniele Faenzi, *Vector bundles on Fano threefolds of genus 7 and Brill-Noether loci*, Preprint available at the authors' webpages, 2007.

[BF08a] ———, *Moduli spaces of rank 2 ACM bundles on prime Fano threefolds*, Arxiv preprint, `http://arxiv.org/abs/0806.2265`, 2008.

[BF08b] ———, *Rank 2 bundles with trivial determinant on Fano threefolds of genus 7*, Preprint, 2008.

[BF08c] ———, *Vector bundles on Fano threefolds of genus 9 and Brill-Noether loci of type II*, Preprint available at the authors' webpages, 2008.

[BGS87] Ragnar-Olaf Buchweitz, Gert-Martin Greuel, and Frank-Olaf Schreyer, *Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities. II*, Invent. Math. **88** (1987), no. 1, 165–182.

[CDH05] Marta Casanellas, Elena Drozd, and Robin Hartshorne, *Gorenstein liaison and ACM sheaves*, J. Reine Angew. Math. **584** (2005), 149–171.

[CH04] Marta Casanellas and Robin Hartshorne, *Gorenstein biliaison and ACM sheaves*, J. Algebra **278** (2004), no. 1, 314–341.

[Dru00] Stéphane Druel, *Espace des modules des faisceaux de rang 2 semi-stables de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$ sur la cubique de $\mathbf{P}^4$*, Internat. Math. Res. Notices (2000), no. 19, 985–1004.

[EH88] David Eisenbud and Jürgen Herzog, *The classification of homogeneous Cohen-Macaulay rings of finite representation type*, Math. Ann. **280** (1988), no. 2, 347–352.

[Fae07] Daniele Faenzi, *Bundles over Fano threefolds of type V_{22}*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **186** (2007), no. 1, 1–24.

[Fan37] Gino Fano, *Sulle varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche*, Mem. R. Acad. D'Italia, **8**, (1937), 23–64.

[GLN06] Laurent Gruson, Fatima Laytimi, and Donihakkalu S. Nagaraj, *On prime Fano threefolds of genus 9*, Internat. J. Math. **17** (2006), no. 3, 253–261.

[Gor90] Alexei L. Gorodentsev, *Exceptional objects and mutations in derived categories*, Helices and vector bundles, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 148, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, pp. 57–73.

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[HL97] Daniel Huybrechts and Manfred Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects of Mathematics, E31, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.

[Hor64] Geoffrey Horrocks, *Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring*, Proc. London Math. Soc. (3) **14** (1964), 689–713.

[Ili03] Atanas Iliev, *The Sp_3-Grassmannian and duality for prime Fano threefolds of genus 9*, Manuscripta Math. **112** (2003), no. 1, 29–53.

[IM06] Atanas Iliev and Laurent Manivel, *Prime Fano Threefolds and Integrable Systems*, Available at `http://www.arxiv.org/abs/math.AG/0606211`, 2006.

[IM07] ———, *Pfaffian lines and vector bundles on Fano threefolds of genus 8*, J. Algebraic Geom. **16** (2007), no. 3, 499–530.

[IM00] Atanas Iliev and Dimitri Markushevich, *The Abel-Jacobi map for a cubic threefold and periods of Fano threefolds of degree 14*, Doc. Math. **5** (2000), 23–47 (electronic).

[IM04a] ———, *Elliptic curves and rank-2 vector bundles on the prime Fano threefold of genus 7*, Adv. Geom. **4** (2004), no. 3, 287–318.

[IM04b] ———, *Parametrization of* $\mathrm{Sing}(\Theta)$ *for a Fano 3-fold of Genus 7 by Moduli of Vector Bundles*, Available at `http://www.arxiv.org/abs/math.AG/0403122`, 2004.

[IR05] Atanas Iliev and Kristian Ranestad, *Geometry of the Lagrangian Grassmannian* $\mathbf{LG}(3,6)$ *with applications to Brill-Noether loci*, Michigan Math. J. **53** (2005), no. 2, 383–417.

[IP99] Vasilii A. Iskovskikh and Yuri. G. Prokhorov, *Fano varieties*, Algebraic geometry, V, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 47, Springer, Berlin, 1999, pp. 1–247.

[Isk77] Vasilii A. Iskovskih, *Fano threefolds. I*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **41** (1977), no. 3, 516–562, 717.

[Isk78] ———, *Fano threefolds. II*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), no. 3, 506–549, English translation in Math. U.S.S.R. Izvestija **12** (1978) no. 3 , 469–506 (translated by Miles Reid).

[Knö87] Horst Knörrer, *Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities. I*, Invent. Math. **88** (1987), no. 1, 153–164.

[Kuz05] Alexander G. Kuznetsov, *Derived categories of the Fano threefolds* V_{12}, Mat. Zametki **78** (2005), no. 4, 579–594, English translation in Math. Notes **78**, no. 3-4, 537–550 (2005).

[Kuz06] ———, *Hyperplane sections and derived categories*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **70** (2006), no. 3, 23–128, Available at `http://www.arxiv.org/abs/math.AG/0503700`.

[Mad02] Carlo Madonna, *ACM vector bundles on prime Fano threefolds and complete intersection Calabi-Yau threefolds*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **47** (2002), no. 2, 211–222 (2003).

[Mer01] Vincent Mercat, *Fibrés stables de pente 2*, Bull. London Math. Soc. **33** (2001), no. 5, 535–542.

[MU83] Shigeru Mukai and Hiroshi Umemura, *Minimal rational threefolds*, Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982), Lecture Notes in Math., vol. 1016, Springer, Berlin, 1983, pp. 490–518.

[Muk88] Shigeru Mukai, *Curves,* $K3$ *surfaces and Fano* 3*-folds of genus* ≤ 10, Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I, Kinokuniya, Tokyo, 1988, pp. 357–377.

[Muk89] ———, *Biregular classification of Fano* 3*-folds and Fano manifolds of coindex* 3, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **86** (1989), no. 9, 3000–3002.

[Muk95] ———, *Curves and symmetric spaces. I*, Amer. J. Math. **117** (1995), no. 6, 1627–1644.

[Ott89] Giorgio Ottaviani, *Some extensions of Horrocks criterion to vector bundles on Grassmannians and quadrics*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **155** (1989), 317–341.

[Pro90] Yuri G. Prokhorov, *Exotic Fano varieties*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. (1990), no. 3, 34–37, 111.

[Tan92] Xiao Jiang Tan, *Some results on the existence of rank two special stable vector bundles*, Manuscripta Math. **75** (1992), no. 4, 365–373.

[TiB91a] Montserrat Teixidor i Bigas, *Brill-Noether theory for stable vector bundles*, Duke Math. J. **62** (1991), no. 2, 385–400.

[TiB91b] ———, *Brill-Noether theory for vector bundles of rank* 2, Tohoku Math. J. (2) **43** (1991), no. 1, 123–126.

Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma La Sapienza, Italy

E-mail address: `brambilla@math.unifi.it, brambilla@mat.uniroma1.it`

Université de Pau et des Pays de l'Adour, Av. de l'université - BP 576 - 64012 PAU Cedex - France

E-mail address: `daniele.faenzi@univ-pau.fr`