

Scheda di esercizi 9: diagonalizzazione di endomorfismi

(a) Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita da:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \\ -x_2 - 2x_3 - x_4 \\ 5x_3 - 2x_4 \\ x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

- calcola il polinomio caratteristico di T
 - calcola gli autovalori di T e le loro molteplicità algebriche e geometriche
 - stabilisci se T è diagonalizzabile,
 - se T è diagonalizzabile scrivi una base (di \mathbb{R}^4) di autovettori (di T),
 - se T è diagonalizzabile scrivi la matrice diagonale che lo rappresenta.
- (b) Stabilisci se le seguenti matrici sono diagonalizzabili e quando lo sono trova una base di autovettori e la matrice diagonale a cui sono simili:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 8 \\ -12 & 8 & 21 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Suggerimento: per le matrici D e E usa la regola di Ruffini per trovare gli autovalori.

- (c) Stabilisci al variare di $k \in \mathbb{R}$ se la matrice A_k è diagonalizzabile e trova, quando possibile, una base di autovettori e la matrice diagonale a cui è simile:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix}$$

⁰Università Politecnica delle Marche, Corso di Geometria, docente Chiara Brambilla

- (d) Stabilisci al variare di $k \in \mathbb{R}$ se la matrice A_k è diagonalizzabile e trova, quando possibile, una base di autovettori e la matrice diagonale a cui è simile:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k-2 & k & 0 \\ 0 & k-1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (e) Cerca tutti gli autovettori delle matrici dell'esercizio (b) che non sono diagonalizzabili e verifica che non danno mai una base di \mathbb{R}^3 .

Soluzioni:

(a) *diagonalizzabile*

(b) *A diagonalizzabile, B non diagonalizzabile, C diagonalizzabile, D non diagonalizzabile, E non diagonalizzabile.*

(c) *se $k > \frac{9}{16}$ non diagonalizzabile, se $k = \frac{9}{16}$ non diagonalizzabile, se $k = \frac{1}{2}$ non diagonalizzabile; se $k < \frac{9}{16}$ e $k \neq \frac{1}{2}$ diagonalizzabile.*

(d) *diagonalizzabile se e solo se $k \neq 4, 1$*