Scheda di esercizi 7: matrice inversa, matrice di cambiamento di base, matrice associate a T

(a) Calcola l'inversa delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = AB \qquad D = BA$$

verifica poi che $C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ e che $C^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

(b) Sia $V = \mathbb{R}_4[t]$ e

$$\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$$

e

$$\mathcal{B}' = \{5t + 5 + t^3, t^4 - 3, t + 1, t^2 - \sqrt{5}, 7 - t^4\}$$

due basi di V. Scrivi la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

(c) Sia $V = \mathbb{R}_3[t]$ e

$$\mathcal{B} = \{t + t^2, 1 - t^3, 2 + t^2, t^2 - 2t + 1\}$$

e

$$\mathcal{B}' = \{5t + 5, t^3 + 3t^2 + 3t + 1, \frac{1}{2}t, t^2 - 4\}$$

due basi di V. Scrivi la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

(d) Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ e

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

due basi di V. Scrivi la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Suggerimento: negli esercizi (c) e (d) siccome $\mathcal{B}$ non è la base canonica conviene utilizzare il metodo della base ausiliaria.

(e) Data l'applicazione $T : M_{2,3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[t]$ definita da:

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{21}t^3 + (a_{11} + a_{22})t^2 + (a_{12} + a_{23})t + a_{13}$$

- verifica che T è lineare;
- scrivi la matrice A associata all'applicazione T rispetto alle basi canoniche $\mathcal{B}$ di $M_{2,3}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}_3[t]$;
- verifica che

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

  è una base di $M_{2,3}(\mathbb{R})$;

[0]Università Politecnica delle Marche, Corso di Geometria, docente Chiara Brambilla

- verifica che $\mathcal{C}' = \{1 - t^2, t^3 - t, 1 - t, t + t^3\}$ è una base di $\mathbb{R}_3[t]$;
- scrivi la matrice del cambiamento di base B da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$;
- scrivi la matrice del cambiamento di base C da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$;
- calcola la matrice A' che rappresenta T rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}'$.
  Suggerimento: per calcolare A' usa la regola che lega le due matrici A' e A.

(f) Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_2 - 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

- scrivi la matrice A che rappresenta T rispetto alle basi canoniche $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$;
- verifica che
  $$\mathcal{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
  è un base di $\mathbb{R}^3$;
- completa i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, a una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^4$;
- scrivi la matrice A' associata a T rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}'$.

(g) Dato l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Verifica che $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e deducine che T è ben definito;
- scrivi la matrice A che rappresenta T rispetto alla base $\mathcal{B}$ *(che non è la base canonica!)*;
- calcolando il rango di A stabilisci se T è iniettiva, suriettiva, invertibile;
- scrivi una base dell'immagine di T e una base del nucleo di T.