Scheda di esercizi 6: isomorfismi

(a) Gli spazi vettoriali $V = \mathbb{R}_3[t]$ e $W = M_{3,3}(\mathbb{R})$ sono isomorfi? In caso affermativo scrivi un isomorfismo tra V e W.

(b) Gli spazi vettoriali $V = \mathbb{R}_5[t]$ e $W = M_{2,3}(\mathbb{R})$ sono isomorfi? In caso affermativo scrivi un isomorfismo tra V e W.

(c) Dati $V = \mathbb{R}_7[t]$, $\mathcal{B}$ la sua base canonica e $F_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^8$ l'isomorfismo coordinate, calcola le immagini tramite $F_{\mathcal{B}}$ dei seguenti polinomi:

$$p_1 = t^7 - t^5 + 5, \quad p_2 = 3t - t^3, \quad p_3 = 3p_1 - t^4, \quad p_4 = (p_2)'$$

(dove $(p)'$ è la derivata di p).

Stabilisci poi se i quattro polinomi p_1, p_2, p_3, p_4 sono linearmente indipendenti e, se lo sono, completali a una base di V.

Suggerimento: usando l'isomorfismo coordinate puoi lavorare in $\mathbb{R}^8$ e usare la riduzione a scala. Alla fine usa $F_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^8 \to V$ per scrivere i quattro polinomi che ti servono.

(d) Una matrice quadrata di ordine n (cioè con n righe e n colonne) si chiama *diagonale* se i suoi unici elementi non nulli si trovano sulla diagonale.

- Verifica che l'insieme D delle matrici diagonali di ordine n è un sottospazio vettoriale di $M_{n,n}(\mathbb{R})$.
- Trova una base di D e la sua dimensione.
- Lo spazio D è isomorfo a $\mathbb{R}^n$? In caso affermativo scrivi un isomorfismo tra D e $\mathbb{R}^n$

(e) Date le applicazioni lineari $T, S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definite da:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + z \\ x + 2y \\ 5z \end{pmatrix} \qquad S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ x - y \\ -x \end{pmatrix}$$

- scrivi l'espressione delle applicazioni lineari $P = T \circ S$ e $Q = S \circ T$;
- scrivi la matrice A associata all'applicazione T, cioè tale che $A = J(T)$ e $T = L_A$;
- scrivi la matrice B associata all'applicazione S;
- calcola le matrici $C = AB$ e $D = BA$;
- verifica che $L_C = P$ e che $L_D = Q$.

[0]Università Politecnica delle Marche, Corso di Geometria, docente Chiara Brambilla

(f) Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+3z \\ y+z+w \\ x \\ 2x+y+4z+w \end{pmatrix}$$

- scrivi la matrice A associata a T (ovvero tale che $L_A = T$)
- calcola la dimensione di nucleo e immagine di T
- T è invertibile? Perché?
- A appartiene a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$? Perché?
- scrivi una base dell'immagine e una base del nucleo di T
- il vettore $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di T?

Suggerimento: per rispondere all'ultima domanda bisogna stabilire se il sistema $Ax = b$ è compatibile o no. Lo puoi fare applicando il teorema di Rouché-Capelli.

(g) Siano $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ e $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ le applicazioni lineari definite come

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ y \\ z \\ 3x+4z \end{pmatrix} \qquad S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z \\ y+3z \end{pmatrix}$$

- Scrivi le matrici associate a T e a S e calcolane i ranghi
- stabilisci se T e S sono iniettive e/o suriettive (usando il fatto di conoscere i ranghi)
- scrivi l'espressione dell'applicazione $R = S \circ T$
- R è iniettiva?
- R è suriettiva?
- trova base e dimensione di nucleo e immagine di R
- è possibile calcolare $T \circ S$? perché?