Esame di Algebra Lineare e Geometria. Ing.Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2016–2017. 20 Settembre 2017

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Scrivi nome e cognome sul testo dell'esame (cioè questo foglio) e su ogni foglio protocollo che consegnerai. Non devi consegnare la brutta copia. Durante l'esame puoi consultare appunti e libri.

Poni $\boldsymbol{a}$ uguale alla penultima cifra del tuo numero di matricola: $\boldsymbol{a}$ =_____

Le risposte alle domande filtro devono essere giustificate. Negli esercizi vanno riportati tutti gli svolgimenti dei calcoli.

---

1. Dato il vettore $v_1 = (\sqrt{3}, 0, -1)^T$, e' possibile scrivere un vettore $v_2 \in \mathbb{R}^3$ che forma un angolo di $\pi/3$ con v_1?

2. Esiste un sistema lineare di $\boldsymbol{a} + 6$ equazioni in 12 incognite che non ammette nessuna soluzione?

3. Esiste una forma bilinere simmetrica indefinita su $\mathbb{R}^3$ tale che $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = \langle e_3, e_3\rangle = 2$?

A. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 2+k & -k & 0 \\ \boldsymbol{a} & -\boldsymbol{a} & k+1 \end{pmatrix}$

(i) Trova gli autovalori di A_k;

(iii) stabilisci per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile;

(iv) per i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile scrivi una base di autovettori.

B. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ definita da

$$T(p(t)) = \begin{pmatrix} p(1) & 0 \\ p(0) & p(-1) \end{pmatrix}$$

(i) Scrivi la matrice associata a T;

(ii) calcola dimensione e base di $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$;

(iii) stabilisci se T e' iniettiva, se e' suriettiva, se e' biunivoca.

(iv) Scrivi un supplementare di $\mathrm{Im}(T)$ in $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

(v) Data l'applicazione lineare $S : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}$ definita come $S(p(t)) = \mathrm{tr}(T(p(t))$ (dove tr denota la traccia di una matrice). Calcola la dimensione di $\mathrm{Ker}(S)$ e $\mathrm{Im}(S)$ e stabilisci se S e' iniettiva, se e' suriettiva, se e' biunivoca.

C. Considera il sottospazio vettoriale $W = \{v \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 = 0, x_3 + (\boldsymbol{a} + 1)x_4 = 0\}$ di $\mathbb{R}^4$.

(i) Trova dimensione e base di W.

(ii) Scrivi una base ortogonale e una base ortonormale di W.

(iii) Trova dimensione e base di $W^\perp$.

(iv) Stabilisci se il vettore $(1, 2, 1, \boldsymbol{a}+1)^T$ appartiene a W. Stabilisci se il vettore $(1, 2, 1, \boldsymbol{a}+1)^T$ appartiene a $W^\perp$.
