Esame di Geometria. Ing.Civile e Ambientale
Anno Accademico 2013–2014. 10 Settembre 2014

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni e le risposte non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia. Puoi risolvere le domande filtro e gli esercizi nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione il più chiaramente possibile.

Poni a uguale all'ultima cifra del tuo numero di matricola in tutto il compito: $a =$____

Domande filtro:

1. È vero che il sistema $\begin{cases} x = y + z \\ y = x + z \\ z = x + y \end{cases}$ è compatibile?

2. È vero che tutte le sezioni piane di un iperboloide iperbolico sono iperboli?

3. Esiste una forma bilineare simmetrica B su $\mathbb{R}^3$ tale che B sia indefinita e che $B(e_1, e_1) = a + 1$, $B(e_2, e_2) = 2$ e $B(e_3, e_3) = 10 - a$?

Esercizi:

A. Data la retta in $\mathbb{R}^3$ di equazione $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = a - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

(i) Stabilisci la posizione reciproca tra la retta r e il piano $\Pi : 3x + y - z = 9 - a$;

(ii) calcola la distanza tra r e Π;

(iii) scrivi l'equazione della retta s perpendicolare al piano Π e passante per il punto $P_0 = (0, a + 1, -1)$;

(iv) calcola l'angolo tra le rette r e s;

(v) stabilisci la posizione reciproca tra r e s.

B.

Data la matrice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -a-2 & a+1 & 2a+3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2a-1 & 1 & 2a+2 & a \end{pmatrix}$

(i) Trova gli autovalori e gli autovettori di A;

(ii) stabilisci se la matrice A è diagonalizzabile e giustifica la risposta.

(iii) Scrivi la dimensione e una base di $\mathrm{Ker}(A)$ e di $\mathrm{Im}(A)$.

C. Dato il sottoinsieme $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : a_{12} + a_{21} = 0 \right\} \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R})$

(i) Stabilisci se W è un sottospazio;

(ii) trova dimensione e base di W.

(iii) Dato il sottospazio $U = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\}$, trova dimensione e basi di $W + U$ e di $W \cap U$.