

**Esame di Geometria per i corsi disattivati.**  
**Anno Accademico 2013–2014. 12 Settembre 2014**

Cognome: \_\_\_\_\_ Nome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_ Immatricolato nel \_\_\_\_\_

---

1. Dati, al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$ , i vettori di  $\mathbb{R}^3$ :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} k \\ k \\ k^2 \end{pmatrix}$$

- (i) Trovare, se esistono, tutti i valori di  $k \in \mathbb{R}$  tali che  $\{v_1, v_2, v_3\}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ ;  
(ii) trovare, se esistono, tutti i valori di  $k \in \mathbb{R}$  tali che  $\{v_1, v_2, v_3\}$  è una base ortogonale di  $\mathbb{R}^3$ .
- 

2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (i) trovare gli autovalori di  $A$ , le relative molteplicità e stabilire se  $A$  è diagonalizzabile,  
(ii) trovare gli autovettori di  $A$  e stabilire se formano una base di  $\mathbb{R}^3$ .
- 

3. Dati in  $\mathbb{R}^3$  la retta  $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 7 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$  e il piano  $\Pi : 3x + y - z = 0$ :

- (i) stabilire la posizione reciproca tra  $r$  e  $\Pi$ ;  
(ii) calcolare la distanza tra  $r$  e  $\Pi$ ;  
(iii) scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta perpendicolare a  $\Pi$  e passante per il punto  $P_0 = (2, 3, 4)$ .
- 

4. Data l'applicazione lineare  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 7y \end{pmatrix}$$

- (i) Scrivere la matrice associata a  $T$  rispetto alle basi canoniche;  
(ii) trovare la dimensione e una base di  $\text{Ker } T$  e di  $\text{Im } T$   
(iii) stabilire se  $T$  è iniettiva, suriettiva, invertibile.
- 

5. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = 1 \\ hx - y + z = 1 \end{cases}$$

stabilire, al variare del parametro  $h \in \mathbb{R}$ , se il sistema ammette soluzioni, quante ne ammette e trovarle.

---