Scritto di Geometria. Anno Accademico 2011–2012. 6 Ottobre 2012

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Deve essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No".*

Poni a uguale all'ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$_____

1. Esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1-k & 2 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ammette l'autovalore 1?

2. Esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ tali che il sistema $\begin{cases} x + hy - z = a + 2 \\ hx + y + z = a \end{cases}$ non ammette nessuna soluzione?

3. Esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}^3$ tale che $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$ e $\dim \mathrm{Ker}(T) = 1$?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Considera i sottospazi vettoriali U e W di $\mathbb{R}^4$ dati rispettivamente da

$U = \{x \in \mathbb{R}^4 \ : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0\}$, $\quad W = \mathrm{Span}(5e_1 + e_2 + 3e_3 + 5e_4, e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4, 4e_1 - e_2 + e_4)$

(i) Trova dimensione e basi di U e di W;

(ii) trova base e dimensione dei sottospazi $U + W$ e $U \cap W$;

(iii) stabilisci se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $v = (2-k)e_1 + 5e_2 + ke_3 + 5e_4$ appartiene a U e se esistono valori di k per cui v appartiene a $U \cap W$;

(iv) completa la base di $U \cap W$ trovata al punto (ii) ad una base di W.

B. Dato l'endomorfismo $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che $T_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ ky \\ 3x + 2y + z \end{pmatrix}$

(i) scrivi la matrice associata a T_k, rispetto a una base a tua scelta;

(ii) al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, calcola dimensione e base di $\mathrm{Ker}\, T_k$ e $\mathrm{Im}\, T_k$ e stabilisci se T_k è iniettiva, suriettiva, invertibile.

(iii) Trova gli autovalori di T_k e stabilisci per quali valori di k l'endomorfismo T_k è diagonalizzabile;

(iv) per tutti i valori di k trovati al punto precedente trova una base di autovettori.

C. Data l'applicazione $\langle \, , \rangle : \mathbb{R}_3[t] \times \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) - p'(2)q(0) - p(0)q'(2) + p''(1)q''(1)$$

(i) Verifica che $\langle \, , \rangle$ è una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}_3[t]$;

(ii) scrivi la matrice S associata a $\langle \, , \rangle$ rispetto a una base a tua scelta;

(iii) stabilisci se $\langle \, , \rangle$ è degenere

(iv) determina se è (semi)-definita positiva, negativa o indefinita.

Corso di laurea Ingegneria: ______________________________