Scritto di Geometria. Anno Accademico 2010–2011. 7 Ottobre 2011

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su **ogni** *foglio che consegnerai devi scrivere nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere* **ben** *chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.*

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No".*

Poni a uguale all'ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$_____

1. È vero che i due sottospazi

$$W = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : 3a_{11} - a_{12} = 0\} \quad \text{e} \quad U = \{p(t) \in \mathbb{R}_3[t] : p(0) = 0, p'(0) = p''(0)\}$$

hanno la stessa dimensione?

2. Esiste un'applicazione lineare iniettiva $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_4[t]$?

3. Dato il prodotto scalare $\langle , \rangle : \mathbb{R}_2[t] \times \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}$ definito da

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(1)q(1) + p'(1)q'(1) + p''(1)q''(1),$$

calcolare la norma (indotta da tale prodotto scalare) del vettore $p(t) = (5 - a)t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}$.

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ discuti la compatibilità del sistema e trovane quando possibile le soluzioni:

$$\begin{cases} -y + z = a + 1 \\ x + ky = k \\ kx + y = k \end{cases}$$

B. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^4$, $T(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p'(0) \\ p'(1) \end{pmatrix}$

(i) scrivi la matrice che rappresenta T rispetto a basi di tua scelta,

(ii) calcola dimensione e basi di $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$,

(iii) stabilisci se T è iniettiva, suriettiva o invertibile,

(iv) stabilisci se il vettore $2e_1 + 2e_2 - e_3 + e_4$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$.

C. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice $A_k = \begin{pmatrix} a & 0 & k+1 \\ k+2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

(i) Trova gli autovalori di A_k;

(ii) stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;

(iii) per tutti i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile, trova una base di autovettori e scrivi la matrice diagonale a cui A_k è simile

(iv) per tutti i valori di k per cui A_k non è diagonalizzabile, trova tutti gli autovettori.

Corso di laurea Ingegneria: ______________________________