

## Scheda di esercizi 5: metodo di Gauss di riduzione a scala

Riduci a scala le seguenti matrici e calcolane il rango:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 12 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 30 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 31 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### Sistemi lineari:

(a) Studia i seguenti sistemi lineari e, quando possibile, trovanne le soluzioni:

$$\begin{cases} y + 2z = 1, \\ -y + z = 0, \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z + w = 0, \\ -3y + 2z = 0, \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + y + 2z = 5, \\ y - 4z = 0, \\ x - y = 10, \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

(b) Al variare del parametro  $h \in \mathbb{R}$  studia il seguente sistema lineare e, quando possibile, trovanne le soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 1, \\ -z + 4w = -h, \\ hx + 2y + 2w = 1, \\ z + w = 0 \end{cases}$$

(c) Al variare di  $k, h \in \mathbb{R}$  studia i seguenti sistemi lineari e, quando possibile, trovanne le soluzioni:

$$\begin{cases} x + ky + w = 9, \\ ky + kz = 1 + h, \\ kx + z - kw = h. \end{cases} \quad \begin{cases} (1+k)x + hy + 2z = 5, \\ 2kx + z = 4 - h, \\ x + hy + z = 3 \end{cases}$$

### Applicazioni del metodo di Gauss:

(a) Completa i seguenti vettori a una base di  $\mathbb{R}^5$ :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$ , trova la dimensione e una base di

$$W = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

(c) Al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$ , trova dimensione e basi di  $\text{Im } L_A$  e  $\text{Ker } L_A$ , dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & k & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(d) Dati

$$U = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{e} \quad W = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Trova dimensione e basi di  $U + W$  e di  $U \cap W$ .

(e) Trova la dimensione e una base dei seguenti sottospazi vettoriali:

$$W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0, x - 5z = 0\}$$

$$U = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2 + 2x_3 = 0, x_1 + x_4 = 0\}$$

$$V = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + 2x_4 = 0\}$$

$$U \cap V$$

(f) Calcola la dimensione e una base dei seguenti sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^4$ :

$$U = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$W = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$U + W$$

$$U \cap W$$

(f) Trova dimensione e basi di  $\text{Im } L_A$  e  $\text{Ker } L_A$ , e stabilisci se  $L_A$  e' iniettiva, suriettiva, biunivoca, per le seguenti matrici  $A$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$