Esame di Algebra Lineare e Geometria. Ing.Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2016–2017. 5 Luglio 2017

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Scrivi nome e cognome sul testo dell'esame (cioè questo foglio) e su ogni foglio protocollo che consegnerai. Non devi consegnare la brutta copia. Durante l'esame puoi consultare appunti e libri.

Poni $\boldsymbol{a}$ uguale all'ultima cifra del tuo numero di matricola: $\boldsymbol{a}$ =____

Le risposte alle domande filtro devono essere giustificate. Negli esercizi vanno riportati tutti gli svolgimenti dei calcoli.

---

1. Dato il vettore $v_1 = (-1, 1, -1)^T$, scrivere un vettore $v_2 \in \mathbb{R}^3$ ortogonale a v_1. Esiste un vettore $v_3 \in \mathbb{R}^3$ ortogonale sia a v_1 che a v_2?

2. Esiste un insieme di matrici che e' un sistema di generatori per $M_{2,2}(\mathbb{R})$ ma non e' una base di $M_{2,2}(\mathbb{R})$?

3. Esiste una matrice reale simmetrica con polinomio caratteristico $\lambda^2 - \lambda + 1$?

A. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 0 & 1 \\ \boldsymbol{a}+k & 0 & \boldsymbol{a}-1 \\ -k & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(i) Trova gli autovalori di A_k;

(iii) stabilisci per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile;

(iv) per i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile scrivi una base di autovettori.

B. Al variare dei parametri $k, h \in \mathbb{R}$ discuti la compatibilità del sistema e trovane quando possibile le soluzioni:

$$\begin{cases} x + (\boldsymbol{a} - h)y + (\boldsymbol{a}+1)z + w = 1 \\ (k-h)y + (1-h)w = k - 1 \\ x + (\boldsymbol{a} - k)y + \boldsymbol{a}w = -k \end{cases}$$

C. Data l'applicazione lineare $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[t]$ definita da

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b)t^2 + (a+d)t + (a+c)$$

(i) Scrivi la matrice associata a T;

(ii) calcola dimensione e base di $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$;

(iii) stabilisci se T e' iniettiva, se e' suriettiva, se e' biunivoca.

(iv) Dato il sottospazio vettoriale $U = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\} \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R})$, stabilire se $\mathrm{Ker}(T) \subseteq U$.

(v) Dato il sottoinsieme $W = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : \det(A) > 0\} \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R})$, stabilire se $\mathrm{Ker}(T) \subseteq W$.

(vi) Stabilire se W e' sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Scelta turno orale:______________________________