Esame di Geometria. Ing.Civile e Ambientale
Anno Accademico 2015–2016. 29 Giugno 2016

Cognome:_______________ Nome:_______________ Matricola:__________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Scrivi nome e cognome sul testo dell'esame (cioè questo foglio) e su ogni foglio protocollo che consegnerai. Non devi consegnare la brutta copia. Durante l'esame puoi consultare appunti e libri.

Poni $\boldsymbol{a}$ uguale all'ultima cifra del tuo numero di matricola: $\boldsymbol{a}$ =_____

Le risposte alle domande filtro devono essere giustificate. Negli esercizi vanno riportati tutti gli svolgimenti dei calcoli.

---

1. Se $T : \mathbb{R}_d[t] \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ è un'applicazione lineare iniettiva, allora si puo' dedurre che $d + 1 \le n$?

2. Esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che la retta di equazione $\begin{cases} 2x + kz = 1 \\ x + (10 - \boldsymbol{a})y + kz = 0 \end{cases}$ e il piano di equazione $x + (\boldsymbol{a} + 1)y = 2$ sono paralleli?

3. Esiste una forma bilineare simmetrica definita positiva B su $\mathbb{R}^3$ tale che $B(e_1, e_2) = -1$?

A. Data la quadrica

$$\mathcal{Q}_k : 2xy + 4xz + 2kx - 2yz + (\boldsymbol{a} + 1) = 0$$

(i) Classifica la quadrica Q_k al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Trova, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che il punto $A = (\frac{1}{2}, -1, 0)$ appartiene alla quadrica Q_k. Per tali valori scrivi l'equazione del piano tangente alla quadrica nel punto A.

B. Considera al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice: $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{k}{2} \\ 2 & -1 & -k \\ 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$

(i) Trova gli autovalori di A_k e stabilisci per quali valori di k la matrice A_k e' diagonalizzabile;

(ii) per i valori di k per cui A_k e' diagonalizzabile, scrivi una base di autovettori e la matrice diagonale a cui e' simile;

(iii) Poni $k = 2$ e stabilisci se A_2 e' invertibile. In caso affermativo calcola la matrice inversa.

C. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $W = \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : XA = AX\}$

(i) Verifica che W è sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ e trovane la dimensione e una base.

(ii) Scrivi uno spazio supplementare di W in $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

(iii) Dato il sottospazio $U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ trova dimensione e base di $U + W$ e di $U \cap W$.

(iv) Data l'applicazione lineare $T : W \to \mathbb{R}$ definita da $T(X) = \operatorname{tr} X$ per ogni $X \in W$, trova dimensione e basi di $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$ e stabilisci se T e' iniettiva e/o suriettiva.

Scelta turno orale:____________________________________