Scritto di Geometria. Anno Accademico 2010–2011. 5 Luglio 2011

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se più di una risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere giustificate: non basta rispondere "Si" o "No".

Poni a uguale alla penultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$____

1. Esiste un'applicazione lineare suriettiva $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $e_1 + e_3 \in \operatorname{Ker} T$?

2. È vero che $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -a \end{pmatrix}$ sono simili?

3. Esiste un sottospazio vettoriale di dimensione a dello spazio $M_{2,3}(\mathbb{R})$?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Data l'applicazione $\langle\, , \,\rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\langle v, w\rangle = v_1w_1 + 2v_1w_2 + 2v_2w_1 + av_2w_2 + av_3w_3 + 2v_3w_4 + 2v_4w_3 + v_4w_4$$

(i) Verifica che $\langle\, , \,\rangle$ è una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^4$;

(ii) scrivi la matrice associata a tale forma rispetto a una base a tua scelta;

(iii) stabilisci se è degenere e determina se è (semi)-definita positiva, negativa o indefinita.

B. Dato il sottospazio $U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ di $\mathbb{R}^4$:

(i) trova la dimensione di U e le sue equazioni cartesiane,

(ii) trova una base ortogonale e una base ortonormale di U;

(iii) scrivi l'equazione della proiezione ortogonale su U $P_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ e calcola $P_U \begin{pmatrix} a+1 \\ 2 \\ 10-a \\ 3 \end{pmatrix}$.

C. Data l'applicazione $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, definita da $T(A) = \begin{pmatrix} (a+1)\operatorname{tr}(A) \\ 3\operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}$

(i) Verifica che T è lineare e scrivine la matrice associata rispetto a basi a tua scelta

(ii) Trova $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$, determina le loro dimensioni e stabilisci se T è iniettiva, suriettiva, invertibile.

Data l'applicazione lineare $P : \mathbb{R}^2 \to M_{2,2}(\mathbb{R})$, definita da $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ 0 & y \end{pmatrix}$ considera l'applicazione lineare composta $Q = P \circ T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$.

(iii) Scrivi la matrice associata a Q rispetto ad una base a tua scelta;

(iv) stabilisci se Q è diagonalizzabile

Corso di laurea Ingegneria: ______________________________