Scheda di esercizi 4: Applicazioni lineari

(a) Stabilisci se le seguenti funzioni sono lineari:

1. $T : \mathbb{R}_4[t] \to \mathbb{R}_3[t]; \qquad T(p(t)) = p'(t)$
2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \qquad T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x^2 \end{pmatrix}$
3. $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[t]; \qquad T : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto at^2 + (b-c)t + 7d$

(b) Sia $F_{\mathcal{B}}$ l'applicazione lineare coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$. Dato $v_0 \in V$, calcola $F_{\mathcal{B}}(v_0)$ nei seguenti casi:

1. $V = \mathbb{R}_3[t], \quad \mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}, \qquad v_0 = t^3 - t + 5$
2. $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $v_0 = \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 3 & 23 \end{pmatrix}$
3. $V = \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) Data la matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, sia $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'applicazione lineare associata, definita da $L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n$. Calcola $L_A(v)$ nei seguenti casi:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 2 \\ 13 & 10 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(d) Trova (se ce ne sono) per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ l'applicazione T è lineare:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \qquad T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + hy - z \\ x + y - h^2 + 4 \\ hx - z \end{pmatrix}$
2. $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3; \qquad T : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + d \\ b + c \\ h \end{pmatrix}$
3. $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^2; \qquad T(at^2 + bt + c) = \begin{pmatrix} a^2 + h \\ hb + c \end{pmatrix}$

Soluzioni: ± 2, 0, *non esiste*

---

[0]Università Politecnica delle Marche, Corso di Geometria, docente Chiara Brambilla

(e) Data la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, scrivi la forma generale dell'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suggerimento: vedi la dimostrazione del "Teorema dell'applicazione lineare" e cerca di scrivere $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dots$

(f) Stabilisci se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione: sì. Per quale teorema?

(g) Stabilisci se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione: no. Perché?

Teorema della dimensione

(I) Esiste un'applicazione lineare iniettiva da $\mathbb{R}_3[t]$ in $\mathbb{R}^2$? Se esiste scrivine una, altrimenti dimostra perche' non esiste.

(II) Esiste un'applicazione lineare suriettiva da $M_{2,2}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}_2[t]$? Se esiste scrivine una, altrimenti dimostra perche' non esiste.

(III) Esiste un'applicazione lineare suriettiva da $M_{2,3}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^8$? Se esiste scrivine una, altrimenti dimostra perche' non esiste.

(IV) Esiste un'applicazione lineare iniettiva da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^8$? Se esiste scrivine una, altrimenti dimostra perche' non esiste.

Esercizio di riepilogo

Una matrice quadrata si dice *simmetrica* se $A = A^T$. Si dice *antisimmetrica* se $A = -A^T$. Ricorda che l'applicazione *trasposta* $A \mapsto A^T$ è lineare, cioe' valgono le due proprieta':

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

per ogni matrice $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Dimostra che l'insieme S_2 delle matrici simmetriche 2×2 è un sottospazio di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
- Trova una base dello spazio S_2 e calcola $\dim S_2$.
- Dimostra che l'insieme A_2 delle matrici antisimmetriche 2×2 è un sottospazio di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
- Trova una base dello spazio A_2 e calcola $\dim A_2$.
- Dimostra che $A_2 \oplus S_2 = M_{2,2}(\mathbb{R})$. *(Suggerimento: verifica prima che $A_2 \cap S_2 = \{0\}$ e poi usa la formula di Grassmann per verificare che $A_2 + S_2 = M_{2,2}(\mathbb{R})$.)*
- Ripeti tutto l'esercizio nel caso delle matrici $M_{3,3}(\mathbb{R})$.