Esame di Geometria per i corsi disattivati.
Anno Accademico 2013–2014. 13 Giugno 2014

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

---

1. Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(i) Dire se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, giustificando la risposta,

(ii) dire se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base ortogonale o ortonormale di $\mathbb{R}^3$, giustificando la risposta.

(iii) Se è possibile, scrivere una base ortonormale applicando l'ortonormalizzazione di Gram-Schmidt ai vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$.

---

2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) trovare gli autovalori di A, le relative molteplicità e stabilire se A è diagonalizzabile,

(ii) trovare gli autovettori di A e stabilire se formano una base di $\mathbb{R}^3$.

---

3. Data l'applicazione lineare $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$T_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+ky-z \\ x-y-z \end{pmatrix}$$

(i) Scrivere la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche;

(ii) trovare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la dimensione e una base di $\operatorname{Ker} T_k$ e di $\operatorname{Im} T_k$

(iii) stabilire, al variare di k, se T_k é iniettiva, suriettiva, invertibile.

---

4. Dati i punti $P = (1, 0, 7)$ e $Q = (0, 2, -4)$ di $\mathbb{R}^3$:

(i) calcolare la distanza tra P e Q e l'angolo tra i vettori OP e OQ (dove O è l'origine),

(ii) scrivi l'equazione della retta r_1 per O e P e della retta r_2 per O e Q,

(iii) trovare il punto D tale che $OPDQ$ sia un parallelogramma.

---

5. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) calcolare $\det(A)$;

(ii) stabilire se A è invertibile e in caso affermativo scrivere l'inversa A^{-1};

(iii) calcolare la matrice $A^2 = A \cdot A$ e calcolare $\det(A^2)$;

(iv) calcolare $\det(A^5)$.
