Scritto di Geometria. Anno Accademico 2010–2011. 16 Giugno 2011

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su **ogni** *foglio che consegnerai devi scrivere nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere* **ben** *chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.*

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No".*

Poni a uguale all'ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$_____

1. Esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice $B_k = \begin{pmatrix} k & 2-a & k-2 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ non è invertibile?

2. Esiste un prodotto scalare non degenere su $\mathbb{R}^4$ tale che $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_4, e_4\rangle = 0$? (dove $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$)

3. Esistono matrici 2×2, non nulle, antisimmetriche (cioè tali che $A^T = -A$) e diagonalizzabili?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Al variare dei parametri $k, h \in \mathbb{R}$ discuti la compatibilità del sistema e trovane quando possibile le soluzioni:

$$\begin{cases} kx + 2y + 2z = k^2 - 4 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ kx + ky + 2z = h - a - 1 \\ ky + kz = 1 \end{cases}$$

B. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & a & k-1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 5 & k \end{pmatrix}$

(i) Trova gli autovalori di A_k;

(ii) stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;

(iii) per tutti i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile, trova una base di autovettori e scrivi la matrice diagonale a cui A_k è simile

(iv) al variare di k trova $\operatorname{Ker} A_k$.

C. Dati i due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}_3[t]$:

$U = \{p(t) \in \mathbb{R}_3[t] : p(1) = 0, p(-1) = 0\}$ e $W = \operatorname{Span}(1 + t, t^2 + t^3, a + at + (a+1)t^2 + (a+1)t^3)$

(i) calcola la dimensione e trova una base di U e di W,

(ii) calcola la dimensione e trova una base di $U + W$ e di $U \cap W$.

(iii) Scrivi equazioni cartesiane e parametriche di $(U \cap W)^\perp$.

(iv) Trova un supplementare di $U + W$.

Corso di laurea Ingegneria: ______________________________