Scheda di esercizi 3: Teorema del completamento e spazi supplementari

(a) Verifica che i vettori dell'insieme A sono linearmente indipendenti e, quindi, completali a una base di V:

1. $V = \mathbb{R}^4; \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
2. $V = M_{2,2}(\mathbb{R}); \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
3. $V = \mathbb{R}_2[t]; \quad A = \{t + t^2, 1 + t\}$

(b) Dato $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V dimostra che qualsiasi sottoinsieme di A è costituito da vettori linearmente indipendenti.

(Suggerimento: prova a dimostrare l'enunciato per assurdo.)

(c) Data la base $B = \{u, v, w\}$ dello spazio vettoriale V, dimostra che anche

$$B' = \{u - v, 2u + w, u + v + 3w\}$$

è una base di V.

(Suggerimento: basta dimostrare che i vettori di B' sono linearmente indipendenti, e poi utilizzare un corollario del teorema del completamento.)

(d) Data la base $B = \{u, v, w\}$ dello spazio vettoriale V, l'insieme

$$B' = \{u - v, 2u + 3w, u + v + 3w\}$$

è una base di V?

(Risposta: no. Perché?)

(e) Scrivi una base del sottospazio W di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ delle matrici a traccia nulla. Qual è la dimensione di W?

(f) È possibile che due piani passanti per l'origine siano supplementari in $\mathbb{R}^3$? Se sì scrivere un esempio.

(g) È possibile che una retta e un piano passanti per l'origine siano supplementari in $\mathbb{R}^3$? Se sì scrivere un esempio.

[0]Università Politecnica delle Marche, Corso di Geometria, docente Chiara Brambilla

(h) Verifica che U e W sono supplementari in V, cioè che $U \oplus W = V$:

1. $V = \mathbb{R}^2$, $\quad U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $\quad W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$;
2. $V = \mathbb{R}^3$, $\quad U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\quad W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$;
3. V =matrici 2x2 a traccia nulla;

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Suggerimento: devi dimostrare che $U + W = V$ *e che* $U \cap W = \{0\}$*. Puoi anche utilizzare la formula di Grassmann, per dimostrare una delle due uguaglianze, conoscendo l'altra.*

(i) Dato il sottospazio U di V, scrivi almeno due diversi supplementari di U in V (e verifica che siano supplementari e che siano diversi!):

1. $V = \mathbb{R}_2[t]$; $\quad U = \operatorname{Span}(t + 1)$
2. $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$; $\quad U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$