Esame di Algebra Lineare e Geometria. Ing.Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2016–2017. 20 Aprile 2017

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Scrivi nome e cognome sul testo dell'esame (cioè questo foglio) e su ogni foglio protocollo che consegnerai. Non devi consegnare la brutta copia. Durante l'esame puoi consultare appunti e libri.

Poni $\boldsymbol{a}$ uguale all'ultima cifra del tuo numero di matricola: $\boldsymbol{a}$ =____

Le risposte alle domande filtro devono essere giustificate. Negli esercizi vanno riportati tutti gli svolgimenti dei calcoli.

---

1. Esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ formano un angolo di $\arccos(\frac{1}{5})$?

2. Esiste una matrice reale simmetrica che ammette l'autovalore $\boldsymbol{a}$ con molteplicita' algebrica 2 e molteplicita' geometrica 1?

3. Dato W un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3 e v_0 un vettore non nullo di $\mathbb{R}^4$, e' vero che W e $\mathrm{Span}(v_0)$ sono sempre supplementari in $\mathbb{R}^4$?

A. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k+1 & 0 & 1 \\ -\boldsymbol{a}-1 & \boldsymbol{a}+1 & 0 \end{pmatrix}$

(i) Stabilisce se esiste $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k e' invertibile, e in caso affermativo trova l'inversa per tale valore di k.

(ii) Trova gli autovalori di A_k;

(iii) stabilisci per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile;

(iv) per i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile scrivi una base di autovettori.

B. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+(10-\boldsymbol{a})y & (10-\boldsymbol{a})y+z \\ z+w & w+x \end{pmatrix}$$

(i) Scrivi la matrice associata a T;

(ii) trova dimensione e basi di $\mathrm{Im}(T)$ e $\mathrm{Ker}(T)$;

(iii) stabilisci se T e' iniettiva, se e' suriettiva, se e' biunivoca.

(iv) Stabilisci se le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3+\boldsymbol{a} & 2+\boldsymbol{a} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

appartengono a $\mathrm{Im}(T)$ o no.

C. Considera il sottospazio $W = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[t] : p(1) = p(2)\}$ di $\mathbb{R}_2[t]$.

(i) Trova dimensione e base di W;

(ii) trova dimensione e base di $W^\perp$.

(iii) Sia $S : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ l'applicazione lineare derivata, cioe' tale che $S(p(t)) = p'(t)$. Trova dimensione e base di $U = S(W) \subseteq \mathbb{R}_2[t]$.

(iv) E' vero che W e U sono supplementari in $\mathbb{R}_2[t]$?

Scelta turno orale:________________________________