Esame di Geometria. Ing.Civile e Ambientale
Anno Accademico 2013–2014. 28 Febbraio 2014

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:__________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni e le risposte non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia. Puoi risolvere le domande filtro e gli esercizi nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione il più chiaramente possibile.

Poni a uguale alla penultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$_____

Domande filtro:

1. Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di V, è vero che $\mathcal{C} = \{v_1+v_2+v_3, v_2+v_3+v_4, v_1+v_3+v_4, v_1+v_2+v_4\}$ è una base di V?

2. È vero che l'insieme $\{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(A) = 13 - a\}$ è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$?

3. Esistono valori di k e h per cui i piani $2x + 3y - z + 7 = 0$ e $-6x + ky + 3z - h = 0$ sono paralleli ma non coincidenti?

Esercizi:

A. Data la quadrica

$$\mathcal{Q}_k : kx^2 + 2xy + 2kyz + 2z = 0$$

(i) Classifica al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la quadrica $\mathcal{Q}_k$.

(ii) Sia $\mathcal{C}_k$ la conica data dall'intersezione di $\mathcal{Q}_k$ con il piano di equazione $z = 1$. Classifica al variare di $k \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C}_k$.

(iii) Trova se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che il punto $P = (-1, 0, -1)$ appartiene alla quadrica $\mathcal{Q}_k$ e per tali valori scrivi l'equazione del piano tangente alla quadrica nel punto P.

(iv) Poni $k = 3$ e verifica che la retta r di equazione $\begin{cases} y + z = -9, \\ 2y - z = 9 \end{cases}$ interseca la quadrica $\mathcal{Q}_3$ in due punti A e B. Trova infine la distanza tra i due punti A e B.

B. Data, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice: $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 2k+1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ -k-1 & 2k+1 & k+1 \end{pmatrix}$

(i) Trova gli autovalori di A_k e stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;

(ii) per tutti i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile scrivi una base di autovettori e la matrice diagonale a cui A_k è simile.

(iii) Al variare del parametro trova la dimensione e una base di $\operatorname{Ker}(A_k)$.

C. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ tale che

$$T(1) = a + 2t + 3t^2, \quad T(t) = 0, \quad T(t^2) = 4 + 5t + at^2$$

(i) Stabilisci se l'applicazione lineare T esiste ed è unica;

(ii) scrivi la matrice associata a T rispetto a basi a tua scelta;

(iii) trova base e dimensione di $\operatorname{Ker} T$ e di $\operatorname{Im} T$;

(iv) stabilisci se T è iniettiva, suriettiva e/o invertibile.

Scelta turno orale:________________________________