Scritto di Geometria. Anno Accademico 2009–2010. 4 Marzo 2010

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su **ogni** *foglio che consegnerai devi scrivere nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).*

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere **ben** *chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.*

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Sì" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perché; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.*

Indica con a l'ultima cifra del tuo numero di matricola.

1. Il sottoinsieme $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = (10 - a)x^2\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$?

2. Se $\langle , \rangle$ è un prodotto scalare non degenere su V, allora può esistere un vettore $v \neq 0$ in V tale che $\langle v, v\rangle = 0$?

3. In $\mathbb{R}_2[t]$ dotato del prodotto scalare standard esistono due polinomi che formano un angolo di $\pi/4$?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & -k \\ 1 & k^2 - ak & -1 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix}$$

(i) Trova gli autovalori di A_k;

(ii) stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;

(iii) per tutti i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile trova una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori;

(iv) nel caso $k = a$, trova una base ortonormale di $\operatorname{Ker}(A_a)$.

B. Sia $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_3[t]$ un'applicazione lineare tale che $T(t) = t^3 - t^2 + t + a$, $T(2t + a) = 0$ e $T(t^2 - t) = 3t^2 - 3t$.

(i) Discuti l'esistenza e l'unicità di T.

(ii) Trova la dimensione e un base dello spazio $U = \operatorname{Im} T$.

(iii) Dato $W = \{p(t) \in \mathbb{R}_3[t] : p''(t) \text{ è il polinomio nullo}\}$, verifica che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[t]$ e trovane la dimensione e una base.

(iv) Trova una base di $U + W$ e di $U \cap W$.

C. Al variare dei parametri $k, h \in \mathbb{R}$ studia il seguente sistema lineare e, quando possibile, determinane le soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 3x + 6y + 3kz = 3h + 3 + 3a \\ x + (h^2 + 1)y = a \\ 2x + 4y + kz = 2a + 1 + k + h \end{cases}$$

Corso di laurea Ingegneria: ______________________________