

Esame di Algebra Lineare e Geometria. Ing. Informatica e dell'Automazione
Anno Accademico 2016–2017. 16 Febbraio 2017

Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____ Immatricolato nel _____

ISTRUZIONI: Scrivi nome e cognome sul testo dell'esame (cioè questo foglio) e su ogni foglio protocollo che consegnerai. Non devi consegnare la brutta copia. Durante l'esame puoi consultare appunti e libri.

Poni \mathbf{a} uguale alla penultima cifra del tuo numero di matricola: $\mathbf{a} =$ _____

Le risposte alle domande filtro devono essere giustificate. Negli esercizi vanno riportati tutti gli svolgimenti dei calcoli.

-
1. Esiste una matrice reale 2×2 con polinomio caratteristico $\lambda^2 + (17 + \mathbf{a})\lambda + 20$?
 2. Esiste un sistema lineare di 4 equazioni in $\mathbf{a} + 3$ incognite che ammette ∞^2 soluzioni?
 3. I sottospazi $U = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 11 - \mathbf{a} \end{pmatrix} \right)$ e $W = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : \text{tr}(A) = 0\}$ hanno la stessa dimensione?

A. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la forma su \mathbb{R}^3 definita da

$$B_k(x, y) = x_1y_1 + kx_1y_3 + kx_3y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 3x_3y_3$$

per ogni $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

- (i) Verifica che B_k e' una forma bilineare simmetrica per ogni $k \in \mathbb{R}$;
- (ii) calcola $B_k \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \right)$;
- (iii) scrivi la matrice associata a B_k ;
- (iv) studia, al variare del parametro k , la degenericita' della forma bilineare simmetrica B_k ;
- (v) studia, al variare del parametro k , il segno della forma bilineare simmetrica B_k .

B. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_3[t] \rightarrow \mathbb{R}_2[t]$ definita da $T(p(t)) = p'(t) + p''(t) + p'''(t)$

- (i) Scrivi la matrice associata a T ;
- (ii) trova dimensione e basi di $\text{Im}(T)$ e $\text{Ker}(T)$;
- (iii) stabilisci se T e' iniettiva, se e' suriettiva, se e' biunivoca.
- (iv) Scrivi due supplementari di $\text{Ker}(T)$ in $\mathbb{R}_3[t]$ diversi tra loro.

C. Data la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 10 - \mathbf{a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, considera il sottoinsieme $U = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : AM = A\}$

- (i) Verifica che U e' un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$;
- (ii) calcola dimensione e base di U ;
- (iii) scrivi una base ortonormale di U ;
- (iv) stabilisci se appartengono a U le seguenti matrici:

$$M, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 20 - 2\mathbf{a} \\ 3 & 30 - 3\mathbf{a} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 20 - 2\mathbf{a} & 30 - 3\mathbf{a} \end{pmatrix}.$$

Scelta turno orale: _____