Scritto di Geometria. Anno Accademico 2011–2012. 10 Febbraio 2012

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No".*

Poni a uguale alla penultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$____

1. Data una forma bilineare simmetrica non degenere $\langle , \rangle$ su $\mathbb{R}^2$, è vero che se $\langle e_1, e_1\rangle + \langle e_2, e_2\rangle = 0$, allora $\langle , \rangle$ è indefinita?

2. Esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_1[t] \to \mathbb{R}^3$ tale che $T(1) = e_1 + ae_2 + e_3$, $T(t) = 0$, $T(1 + t) = e_1 + ae_2 + e_3$?

3. Le matrici $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sono simili?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ discuti la compatibilità del sistema e trovane, quando possibile, le soluzioni:

$$\begin{cases} x + ky + 3z + aw = 2 \\ (k-2)y + w = h - 3 \\ x + ky + hz + aw = k \end{cases}$$

B. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2+k & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(i) Trova gli autovalori di A_k;

(ii) stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;

(iii) per i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile scrivi una base di autovettori e la matrice diagonale a cui A_k è simile.

(iv) Esistono valori di k per cui $\ker A_k$ ha dimensione 2?

C. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to M_{2,2}$ definita da $T(p(t)) = \begin{pmatrix} p(1) & p(-2) \\ p(2) & p(-1) \end{pmatrix}$

(i) Scrivi la matrice associata a T rispetto a basi a tua scelta.

(ii) Calcola dimensione di $\operatorname{Ker} T$ e di $\operatorname{Im} T$ e stabilisci se T è iniettiva, suriettiva, invertibile.

(iii) Scrivi una base $\mathcal{B}$ di $\operatorname{Im} T$.

(iv) Verifica che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ appartengono al sottospazio $\operatorname{Im} T$ e completali a una base $\mathcal{B}'$ di $\operatorname{Im} T$.

(v) Calcola $M = T(a + t - t^2)$. Scrivi le coordinate di M rispetto alla base $\mathcal{B}$ e rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

Corso di laurea Ingegneria: __________________ **Scelta turno orale:**__________________