Scritto di Geometria. Anno Accademico 2010–2011. 10 Febbraio 2011

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su **ogni** *foglio che consegnerai devi scrivere nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere* **ben** *chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.*

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No".*

Poni a uguale alla penultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$_____

1. Siano $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3x+2y \\ x+y \end{vmatrix}$ e $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2y \\ -x-3y \end{vmatrix}$. È vero che P è l'applicazione inversa di T?

2. È possibile che le matrici $A = \begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 1 & 9-a \\ 0 & 9-a & 3 \end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ definiscano lo stesso prodotto scalare, rispetto a basi diverse?

3. Se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è un sistema di generatori di V, esistono vettori di V che non sono combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_k$?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Al variare dei parametri $k, h \in \mathbb{R}$ discuti la compatibilità del sistema e trovane quando possibile le soluzioni:

$$\begin{cases} x+y-2z=2 \\ 9x+(a-2)y+(4-2a)z=2a \\ ax+ay-kz=2a \\ (10-a)x-y+2z=h \end{cases}$$

B. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice $A_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2k & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(i) Trova gli autovalori di A_k;

(ii) stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;

(iii) per i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile scrivi la matrice diagonale a cui A_k è simile e trova una base di autovettori.

C. Considera l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to M_{2,2}(\mathbb{R})$, definita da $T \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+1)x_1 & x_2 \\ (10-a)x_3 & x_4 \end{vmatrix}$

(i) Dimostra che $U = \{v \in \mathbb{R}^4 : \mathrm{tr}(T(v)) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e trovane una base e la dimensione.

(ii) Scrivi una base ortonormale di U, rispetto al prodotto scalare canonico.

(iii) Scrivi equazioni cartesiane e parametriche di $U^\perp$.

(iv) Calcola la dimensione di $W = \mathrm{Span}(e_1+e_2, (a+1)e_2+e_3, e_3+e_4) \subseteq \mathbb{R}^4$ e stabilisci se W e $U^\perp$ sono supplementari in $\mathbb{R}^4$.

Corso di laurea Ingegneria: _________________ **Scelta turno orale:**_________________