

Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____ Immatricolato nel _____

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

*Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere **giustificate**: non basta rispondere "Sì" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.*

Indica con a la penultima cifra del tuo numero di matricola.

1. È possibile che un autovalore di un endomorfismo abbia molteplicità geometrica uguale a 0?
2. Esistono due matrici quadrate A e B tali che $\det(AB) \neq \det(BA)$?
3. Esiste un prodotto scalare non degenere su \mathbb{R}^3 tale che $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = 0$?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvi nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Al variare dei parametri $k, h \in \mathbb{C}$ studia il seguente sistema lineare e, quando possibile, determinane le soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = k \\ hx + y + 2z + 3w = a \\ (h - 1)x - y + hz - w = a + k^2 \end{cases}$$

B. Data l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_2[t] \times \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$\langle p(t), q(t) \rangle = |a - 5|p(0)q(0) + p''(2)q(1) + p(1)q''(2) - p'(-1)q'(-1)$$

- (i) Dimostra che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}_2[t]$;
- (ii) scrivi la matrice associata a tale prodotto scalare rispetto a una base a tua scelta;
- (iii) stabilisci se è degenere;
- (iv) determina se è (semi)-definito positivo, negativo o indefinito.

C. Considera l'endomorfismo $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ dato da $T(A) = 2A + (a + 1)A^T$

- (i) Scrivi la matrice associata a T rispetto ad una base a tua scelta.
- (ii) Trova nucleo e immagine di T .
- (iii) Determina gli autovalori di T e i corrispondenti autovettori.
- (iv) Stabilisci se T sia diagonalizzabile o meno.

Corso di laurea Ingegneria: _____ **Scelta turno orale:** _____