Scheda di esercizi 1: sottospazi vettoriali

(a) Dato il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \geq 0, y \geq 0, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

dimostrare che W è chiuso rispetto alla somma, ma non rispetto al prodotto per scalare, e quindi NON è un sottospazio.

(b) Dato il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : xy = 0, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

dimostrare che W è chiuso rispetto al prodotto per scalare, ma non rispetto alla somma e quindi NON è un sottospazio.

(c) Rappresentare nel piano cartesiano i sottoinsiemi definiti negli esercizi (a) e (b).

(d) Stabilire se W è sottospazio vettoriale di V nei seguenti casi:

1. $V = \mathbb{R}^3; \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ 2a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$
2. $V = \mathbb{R}^3; \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda+\mu \\ 2\mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$
3. $V = \mathbb{R}^2; \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$
4. $V = M_{2,2}(\mathbb{R}); \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ 3\beta & 3\alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$
5. $V = \mathbb{R}_3[t]; \quad W = \{2at + 3b : a, b \in \mathbb{R}\}$
6. $V = \mathbb{R}_2[t]; \quad W = \{at^2 - 1 : a \in \mathbb{R}\}$
7. $V = M_{2,3}(\mathbb{R}); \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
8. $V = \mathbb{R}^2; \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 = 1, x, y \in \mathbb{R} \right\}$
9. $V = \mathbb{R}^2; \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 - y^2 = 0, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Soluzioni: W non è sottospazio di V nei casi (1), (3), (6), (8), (9).

[0]Università Politecnica delle Marche, Corso di Geometria, docente Chiara Brambilla