

Scheda di esercizi 15: coniche e quadriche

(a) Classifica le seguenti coniche e portale in forma canonica metrica (usando l'algoritmo):

$$\mathcal{C}_1 : x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y - 1 = 0$$

$$\mathcal{C}_2 : 3x^2 + 10xy + 3y^2 + 4x - 4y - 2 = 0$$

$$\mathcal{C}_3 : 2x^2 + 2x + 4y + 3 = 0$$

(b) Classifica le seguenti coniche al variare del parametro reale k :

$$x^2 + y^2 + (k - 1)xy + x = 0$$

$$(k - 3)y^2 + 2xy + 2x = 0$$

(c) Classifica le seguenti quadriche:

$$\mathcal{Q}_1 : 2x^2 - 4xy + y^2 + 6yz + 5z^2 - 2z + 1 = 0$$

$$\mathcal{Q}_2 : x^2 + 4xy + 6xz + 2yz + 4x + 2z + 5 = 0$$

$$\mathcal{Q}_3 : 3x^2 + 2y^2 + 2yz + 2x + 2y + 2z + 2 = 0$$

$$\mathcal{Q}_4 : x^2 + 2xz + y^2 + z^2 - 2z - 5 = 0$$

$$\mathcal{Q}_5 : 4x^2 + 2xz + 4x + 2z = 0$$

(d) Data la quadrica \mathcal{Q} di equazione $x^2 + 2xy + 2yz + z^2 - 1$,

- classifica la quadrica,
- trova l'intersezione della quadrica con la retta di equazione $x = t, y = -t, z = 1$ e chiama P_1 e P_2 i due punti di intersezione
- scrivi l'equazione del piano Π_1 tangente a \mathcal{Q} nel punto P_1 e del piano Π_2 tangente nel punto P_2
- studia la posizione reciproca dei due piani Π_1 e Π_2 e trovine l'eventuale intersezione $\Pi_1 \cap \Pi_2$

(e) Classifica le seguenti quadriche al variare del parametro reale k :

$$x^2 + y^2 + 6yz - z^2 + 2kx + 1 = 0$$

$$x^2 + 2kxy + y^2 + 2xz + 2y + 2z - 2 = 0$$

$$kxy + z^2 - 2z + 1 = 0$$

(f) Data la quadrica \mathcal{Q} di equazione:

$$z = xy$$

- classifica la quadrica,
- trova l'intersezione della quadrica con i seguenti piani e nei vari casi descrivi che tipo di curva si ottiene:

$$\Pi_1 : z = 0$$

$$\Pi_2 : z = 4$$

$$\Pi_3 : x = 0$$

$$\Pi_4 : x = y$$

$$\Pi_5 : x = -y$$

(g) Data la quadrica \mathcal{Q} di equazione:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

- classifica la quadrica,
- trova l'intersezione della quadrica con i seguenti piani e nei vari casi descrivi che tipo di curva si ottiene:

$$\Pi_1 : z = 3$$

$$\Pi_2 : z = 0$$

$$\Pi_3 : x = 2$$

$$\Pi_4 : x = 0$$

$$\Pi_5 : z = x + 1$$

$$\Pi_6 : z = x$$

- prova a disegnare la quadrica e le varie sezioni (coniche) trovate nel punto precedente.