Scheda di esercizi 12: teorema spettrale

(a) Stabilisci se esistono valori di $k \in \mathbb{C}$ tali che le seguenti matrici ammettono una base ortonormale di autovettori:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6-k \\ 3 & 1+k & 2k+1 \\ k^2-1 & \sqrt{29} & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & 13 & k^2-4 & 1 \\ 13 & 10 & 3 & 0 \\ 2+5k & 3 & -26 & k+4 \\ 1 & 0 & k^2+k & 1+3k^2 \end{pmatrix}$$

(b) Usando il teorema spettrale e il criterio di Cartesio, studia il segno delle forme bilineari rappresentate (rispetto alla base canonica) dalle seguenti matrici simmetriche:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Verifica che

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ (con il prodotto scalare canonico) e che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

è una matrice ortogonale (cioè che $A^T A = I$). Calcola infine $\det(A)$.

(d) Verifica che per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ -\operatorname{sen}\vartheta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ e che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ -\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

è una matrice ortogonale.

[0] Università Politecnica delle Marche, Corso di Geometria, docente Chiara Brambilla

(e) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- scrivi una base $\mathcal{B}$ di autovettori di A e la relativa matrice di cambiamento di base B dalla base canonica a $\mathcal{B}$,
- scrivi la matrice diagonale D simile a A,
- scrivi una base ortonormale $\mathcal{C}$ di autovettori di A e la relativa matrice di cambiamento di base C dalla base canonica a $\mathcal{C}$,
- verifica che $D = B^{-1}AB$ (cioè che D e A sono simili attraverso B),
- verifica che $D = C^{-1}AC$ (cioè che D e A sono simili attraverso C), e inoltre che $D = C^TAC$ (cioè che D e A sono congruenti attraverso C),
- è vero che $D = B^TAB$? Perché?