Scheda di esercizi 11: basi ortogonali

(a) Determina se le seguenti basi sono o non sono ortogonali e/o ortonormali, rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Considera lo spazio $V = \mathbb{R}_2[t]$ dotato della forma

$$B(a_0 + a_1 t + a_2 t^2, b_0 + b_1 t + b_2 t^2) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

- Verifica che è bilineare, simmetrica e definita positiva.
- Calcola $B(\sqrt{2} + t^2, t^2 + t - 3)$.
- Stabilisci se i seguenti polinomi costituiscono una base di V e se tale base è ortogonale e/o ortonormale:
$$t + 1, t^2, 2 - 2t$$
- calcola l'angolo α tra i polinomi $p_1(t) = 1 - t^2$ e $p_2(t) = t + t^2$. *Sol:* $\frac{2\pi}{3}$
- calcola l'angolo α tra i polinomi $p_1(t) = 3 + 4t$ e $p_2(t) = 1 + \frac{1}{2}t + t^2$. *Sol:* $\arccos(\frac{2}{3})$

(c) Applica il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alle seguenti basi di V (dotato di prodotto scalare canonico):

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad V = \mathbb{R}^3$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad V = \mathbb{R}^4$$

(d) Calcola equazioni cartesiane e parametriche del supplemento ortogonale $U^\perp$ nei seguenti casi:

- $U \subseteq \mathbb{R}^4, \qquad U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

[0]Università Politecnica delle Marche, Corso di Geometria, docente Chiara Brambilla

- $U \subseteq \mathbb{R}^3$, $\qquad U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$
- $U \subseteq \mathbb{R}^3$, $\quad U = \ker(T) \quad$ dove $\quad T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

(e) Sia $V = \mathbb{R}_3[t]$ dotato del prodotto scalare canonico, cioe' tale che

$$\langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- Dopo aver verificato che i seguenti polinomi costituiscono una base di V, applica ad essi (scegliendo l'ordine che preferisci) il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt:
$$t + 1, t + t^2, 2 - t - t^3, t^3$$
- Dato il sottospazio $U = \mathrm{Span}(t^3 - 1, t + 2)$ di V, calcola equazioni cartesiane e parametriche di $U^{\perp}$.
- Scrivi una base ortonormale di U e una base ortonormale di $U^{\perp}$.

(f) Dato

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subseteq \mathbb{R}^4$$

- scrivi una base ortonormale di U,
- Dato $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcola $P_U(v_0) = u_0$, dove P_U è la proiezione ortogonale sul sottospazio U, *(Suggerimento: usa la formula $P_U(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2$)*
- scrivi la matrice A associata alla proiezione ortogonale $P_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ rispetto a una base di $\mathbb{R}^4$ a tua scelta.
- verifica che Av_0 è il vettore u_0 che hai calcolato al punto 2.
- verifica che $v_0 - u_0 \in U^{\perp}$.

Soluzione: $u_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$